

彩虹連通在導覽路線上的應用

李安鈞, 賴泳伶

國立嘉義大學

資訊工程學系暨研究所

{s1020449,yllai}@mail.ncyu.edu.tw

摘要

對一個連通圖 G 定義邊著色函數(edge coloring function) $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ 使得任意兩點間都存在至少一條路徑(path)上面每一個邊的顏色均不同, 則稱此著色函數為 G 上的一彩虹著色函數(rainbow coloring function), 而每個邊上顏色均不同的路徑則稱為彩虹路徑(rainbow path), 在 G 所有的彩虹著色函數中 k 值最小的稱為圖 G 的最佳彩虹著色函數(optimal rainbow coloring function), 此 k 值則稱為圖 G 的彩虹連通數(rainbow connection number)。對任意圖 G , 本文證明彩虹連通數為 $|E(G)| - 3$ 或 G 的直徑的充分必要條件。

1 介紹

有關於圖形的著色問題, 多數都集中在頂點著色上面, 本文所探討的是邊著色問題, 對一個連通圖(connected graph) G , 定義其邊著色函數(edge coloring function) $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, 其中相鄰的邊可著相同顏色。若一條路徑(path)上每個邊的顏色皆不同時, 我們稱此路徑為一彩虹路徑(rainbow path), 若 G 上任兩點間均存在一條彩虹路徑, 則稱此函數 f 為一彩虹著色函數(rainbow coloring function)。而 G 的所有彩虹著色函數中 k 的最小值則稱為 G 的彩虹連通數(rainbow connection number), 以 $rc(G)$ 表示。

有關於圖形彩虹著色的研究始於 2006 年由 Chartrand 等人[2]所提出, 之後即有許多學者研究各種不同圖形的彩虹連通數, 例如: Hypergraph[1], Petersen graph[2], complete[2], Tree[2], cycle[2], Wheel[2], Corona Graphs[3], random graphs [4], Fan[8], Sun[8], triangular pyramids[9], Versatile Pyramid Network[10], Cartesian product [11]等。除此之外由於一個圖形的彩虹連通數必大於等於它的直徑(diameter)並小於等於它的邊數, 且符合彩虹連通數等於邊數的圖形必為樹(tree)[2], 有關於彩虹連通數與圖形的特徵關係就成為另一個研究方向。有人研究直徑為 2 的圖形的彩虹連通數[5], 也有人提出彩虹連通數必等於邊數減 2 的圖形特徵[6][7](不存在彩虹連通數為圖形邊數減 1 的圖形[6])。

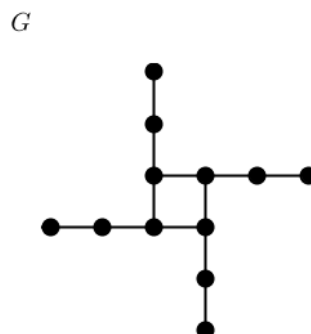
彩虹著色問題可以應用在許多方面, 例如: 在

舉辦活動時導覽路線的規劃很重要, 而我們希望在各個展區之間的道路種上一些花卉, 讓民眾在欣賞展覽之餘還可以欣賞美麗的花卉, 我們將一條道路上種上同一種花卉, 限於經費的關係, 主辦單位要求花卉種類要盡量少, 但又希望民眾能欣賞到不同的花卉。可將活動場地以圖形表示, 其中頂點代表活動主要展區, 邊代表連接兩展區之間的道路, 雖然並非每個展區之間都有道路相連, 但是任兩個展區之間都可經由其他的展區到達。每個相鄰展區間的道路種植一種花卉, 民眾在任兩個欲參觀的展區移動時, 沿途不會有重複的花卉, 如此所需要的花卉種類的最小值就相當於該活動場地圖形的彩虹連通數。

本文提出彩虹連通數等於邊數減 3 及等於直徑的圖形特徵, 並證明只有由所提方式所建構出來的圖形, 其彩虹連通數才會符合要求。

2 彩虹連通數等於邊數減 3

令圖 H 為一個連通圖, $V(H) = \{v_1, \dots, v_k\}$, 且圖 H 每一點的分支度(degree)都大於 1 (即 $\delta(H) \geq 2$)。令 $T = \{T_i : 1 \leq i \leq k\}$ 為以 H 的頂點為根(root)的樹所成的集合, 其中 T_i 的根為 $v_i (1 \leq i \leq k)$ 。令圖 G 為 H 與 T_i 所合成之圖形, 如圖一所示。



圖一: $H = C_4, T_i = P_3 (1 \leq i \leq 4)$ 所合成之圖形 G

定理 2.1

$$|E(G)| - rc(G) = |E(H)| - rc(H)。$$

證明：

因為符合彩虹連通數等於邊數的圖必為樹 [2]，且 $rc(G) = rc(H) + \sum_{i=1}^k rc(T_i)$ ，所以

$$rc(G) = rc(H) + \sum_{i=1}^k |E(T_i)|， \quad \text{故}$$

$$\begin{aligned} |E(G)| - rc(G) &= |E(G)| - \left(rc(H) + \sum_{i=1}^k |E(T_i)| \right) \\ &= |E(G)| - rc(H) - \sum_{i=1}^k |E(T_i)| \\ &= |E(G)| - \sum_{i=1}^k |E(T_i)| - rc(H) \\ &= |E(H)| - rc(H) \quad \square \end{aligned}$$

由定理 2.1 得知，若要求得圖形 G 的邊數與其彩虹連通數的差，則只需要考慮 H 即可。

定理 2.2

令 v_0, v_m 為 H 上相異兩點， $P(v_0, v_m) = v_0, v_1, \dots, v_m$ 為 H 上長度為 m 的路徑，考慮一條長度為 n 的路徑 $P'(v_0, v_m) = v_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, v_m$ 且 $u_0 = v_0, u_n = v_m$ ，其中 $u_i \notin V(H)$ ， $n \in \mathbb{Z}^+$ 且 $1 \leq i \leq n-1$ 。令 $H' = H \cup P'$ ，則 $rc(H') \leq rc(H) + \lceil |E(P')|/2 \rceil$ 。

證明：

令 f 為 H 上的最佳彩虹著色函數，且 $k = rc(H)$ 。考慮 $f': V(H') \rightarrow N$ ， $f'(e) = f(e)$ 若 $e \in E(H)$ ；

$$f'(u_i, u_{i+1}) = k + i + 1, \quad 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1;$$

$$f'(u_i, u_{i+1}) = k + i + 1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq i \leq n-1。$$

則 f' 為 H' 的彩虹著色函數，且其最大值為 $rc(H) + \lceil n/2 \rceil$ ，故 $rc(H') \leq rc(H) + \lceil |E(P')|/2 \rceil$ $\square$

令 $\mathcal{H} = \{H : H \text{ 為連通圖}, |E(H)| = m \text{ 且 } \delta(H) \geq 2\}$ 。存在 v_0, v_i 為 H 上相異兩點，使 $P(v_0, v_i) = v_0, v_1, \dots, v_i$ 為 H 上長度為 i 的路徑。考慮 $P'(v_0, v_i) = v_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, v_i$ 其中 $u_j \notin V(H)$ 且 $|E(P')| = n$ 。我們以 $\mathcal{H}'$ 表示集合 $\{H' = H \cup P' \mid \forall H \in \mathcal{H}\}$ 。

當該圖 H 的彩虹連通數等於邊數減 3，即 $rc(H) = |E(H)| - 3$ 時，因為 $0 < rc(H) \leq |E(H)|$ 所以 $|E(H)| \geq 4$ 故最小的生成圖為 $|E(H)| = 4$ 。

一個邊數為 $m+n$ 的 H' 可由邊數為 m 的 H 加上一個長度為 $n(1 \leq n)$ 的路徑 P' 生成，所以我們可以由 $|E(H)| = 4$ 生成所有 $\mathcal{H}$ 中的圖 H 。

定理 2.3

所有彩虹連通數小於邊數減 3 的生成圖的彩虹連通數皆小於邊數減 3。即 $\forall H \in \mathcal{H}, rc(H) < m-3$ 則 $rc(H') < m+n-3$ 。

證明：

由定理 2.2 得知 $rc(H') \leq rc(H) + \lceil |E(P')|/2 \rceil \leq rc(H) + \lceil n/2 \rceil$ ，又因為 $rc(\mathcal{H}) < m-3$ ，所以 $rc(H') < m-3 + \lceil n/2 \rceil \leq m+n-3$ $\square$

我們將 $4 \leq |E(H)| \leq 8$ 所有的 H 都列出來，得到 $rc(H) \geq |E(H)| - 3$ 有 6 種如圖二與圖三，其中 $rc(H) > |E(H)| - 3$ 有 2 種如圖二，分別為 H_1 與 H_2 ； $rc(H) = |E(H)| - 3$ 有 4 種如圖三，分別為 H_3 、 H_4 、 H_5 與 H_6 。

定理 2.4

若 H 為連通圖且 $\delta(H) \geq 2$ ， $rc(H) \geq |E(H)| - 3$ ，則 $|E(H')| \geq 8$ 時 $rc(H') < |E(H')| - 3$ 。

證明：

當 $rc(H) = |E(H)| - 3$ 時，由定理 2.2 得知 $rc(H') \leq rc(H) + \lceil |E(P')|/2 \rceil = |E(H)| - 3 + \lceil |E(P')|/2 \rceil$ ，當 $|E(P')| = 1$ 時 $rc(H') \leq |E(H)| - 3 + \lceil 1/2 \rceil = |E(H)| - 3 + 1 = |E(H')| - 3$ ，但是我們已將邊數為 8 的所有情況畫出，並且證實所有的彩虹連通數皆小於邊數減 3。

當 $|E(P')| > 1$ 時， $\lceil |E(P')|/2 \rceil < |E(P')|$ ，由定理 2.2 得知

$$\begin{aligned} rc(H') &\leq rc(H) + \left\lceil \frac{|E(P')|}{2} \right\rceil \\ &< rc(H) + |E(P')| \\ &= |E(H)| - 3 + |E(P')| \\ &= |E(H')| - 3 \end{aligned}$$

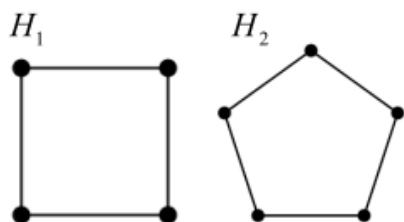
所以由 $rc(H) = |E(H)| - 3$ 所生成的 H' 的彩虹連通數皆小於邊數減 3。

當 $|E(P')| \geq 4$ 時由定理 2.2 得知

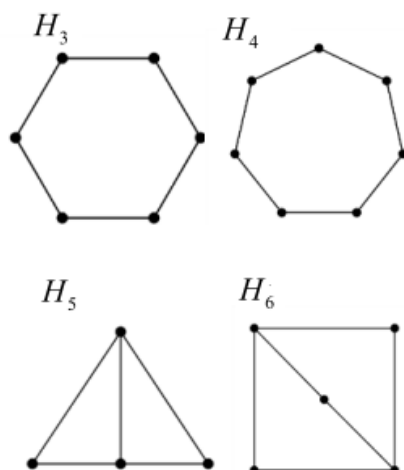
$$\begin{aligned} rc(H') &\leq rc(H) + \left\lceil \frac{|E(P')|}{2} \right\rceil \\ &\leq rc(H) + |E(P')| - 2 \end{aligned}$$

然而我們已經邊數小於等於 8 的所有圖畫出其中 $rc(H) > |E(H)| - 3$ 如圖二有 2 種，其彩虹連通數等於邊數減 2，當 $H = H_1$ 時， H_1 的邊數為 4， $rc(H_1) = 2 \Rightarrow rc(H') \leq 2 + |E(P')| - 2 = |E(P')| < 4 + |E(P')| - 3 = |E(H')| - 3$ ；當 $H = H_2$ 時， H_2 的邊數為 5， $rc(H_2) = 3 \Rightarrow rc(H') \leq$

$3 + |E(P')| - 2 = |E(P')| + 1 < |E(P')| + 5 - 3 = |E(H')| - 3$ ，我們已將邊數為 8 的所有情況畫出，並且證實所有的彩虹連通數皆小於邊數減 3，又證明當 $|E(H')| \geq 9$ 的彩虹連通數皆小於邊數減 3，所以得知當 $rc(H) > |E(H)| - 3$ ，則 $|E(H')| \geq 8$ 時 $rc(H') < |E(H')| - 3$ 。□



圖二：彩虹連通數大於邊數減 3



圖三：彩虹連通數等於邊數減 3

由定理 2.4 證明，當邊數大於等於 8 時，其彩虹連通數會小於邊數減 3，最我們找出符合彩虹連通數會等於邊數減 3 的圖的特徵為下列 G_3 至 G_8 。

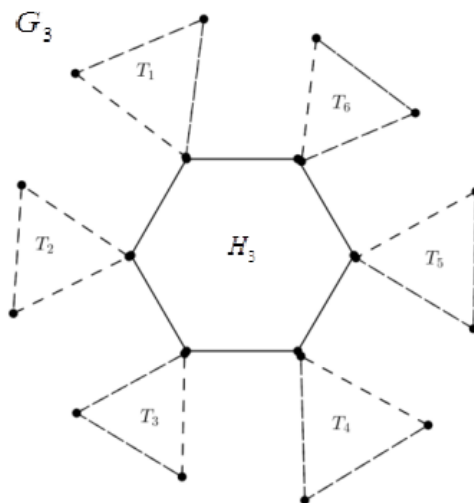
如圖三所示， $H_3 = C_6$ ， $H_4 = C_7$ ， H_5 為一個 C_4 中間加上一弦所形成， $H_6 = K_{2,3}$ ，注意到 $\delta(H_i) \geq 2$ ， $3 \leq i \leq 6$ 。令 $T_k = \{T_i : 1 \leq i \leq |V(H_i)|\}$ 為以 H_i 的頂點為根(root)的樹所成的集合，其中 T_i 的根為 $v_i (1 \leq i \leq |V(H_i)|)$ 。令 G_i 為 $H_i (3 \leq i \leq 6)$ 與 $T_k (1 \leq k \leq |V(H_i)|)$ 所合成之圖形。 G_3 至 G_6 如圖四至圖七所示。

令 $G_7 = \{\text{任意個 } G_i (3 \leq i \leq 6) \text{ 以任意長度的路徑}$

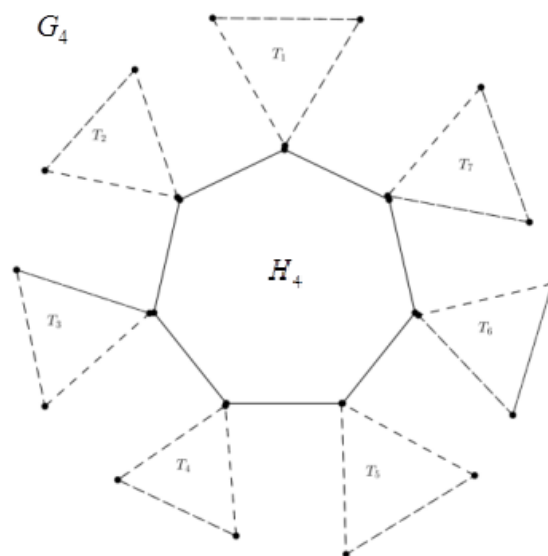
$P \text{ 相連}, T_i (1 \leq i \leq |V(G_i)| + |E(P)| - 1)\}$

令 $G_8 = \{\text{任意個圖 } H_i (3 \leq i \leq 6) \text{ 頂點相接},$

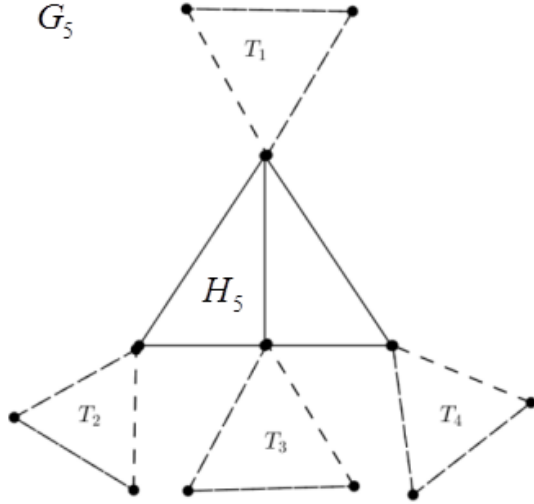
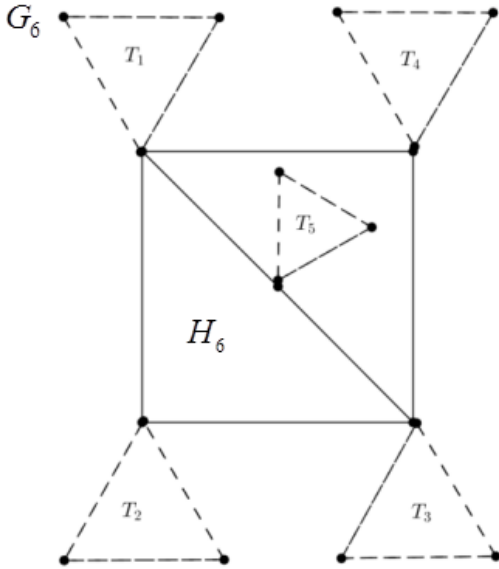
$T_i (1 \leq i \leq |V(H_i)|)\}$



圖四： H_3 上每個點分別為 $T_i (1 \leq i \leq 6)$ 的根



圖五： H_4 上每個點分別為 $T_i (1 \leq i \leq 7)$ 的根

圖六: H_5 上每個點分別為 $T_i (1 \leq i \leq 4)$ 的根圖七: H_6 上每個點分別為 $T_i (1 \leq i \leq 5)$ 的根

3 彩虹連通數等於直徑

對一個連通圖 G 而言，每個頂點到其他頂點距離的最大值為該頂點的離心率(eccentricity)，記作 $e(v)$ ，圖 G 中所有頂點離心率的最大值稱為該圖的直徑，記作 $diam(G)$ ，若 $e(v) = diam(G)$ 則點 v 稱為圖 G 的外圍點(peripherad)。

令 v 為圖 G_1 的外圍點， u 為圖 G_2 的外圍點，若 $G = G_1 \cup G_2$ 使 $v = u$ 則稱 G 為 G_1 與 G_2 的串聯合成圖(series connection)。

令 $vv' \in E(G_1)$ ， $uu' \in E(G_2)$ 若 $G' = G_1 \cup G_2$ 使得 $vv' = uu'$ ，則稱 G' 為 G_1 與 G_2 的並聯合成圖(parallel connection)。

定理 3.1

圖 G 為圖 G_1 與圖 G_2 的串聯合成圖，若 $rc(G_1) = diam(G_1)$ ， $rc(G_2) = diam(G_2)$ 且 $diam(G) = diam(G_1) + diam(G_2)$ 則 $rc(G) = diam(G)$ 。

證明：

已知 $rc(G) \geq diam(G)$ [2]，所以 $rc(G) \geq diam(G)$ ，因為 $rc(G_1) = diam(G_1)$ ， $rc(G_2) = diam(G_2)$ 且 $diam(G) = diam(G_1) + diam(G_2)$ 故 $rc(G_1) + rc(G_2) = diam(G_1) + diam(G_2)$

$$= diam(G')$$

又因為 $rc(G_1) + rc(G_2) \geq rc(G)$ 所以 $diam(G) \geq rc(G)$ ，由夾擠得知 $rc(G) = diam(G)$ □

定理 3.2

圖 G' 為圖 G_1 與圖 G_2 的並聯合成圖，若 $rc(G_1) = diam(G_1)$ ， $rc(G_2) = diam(G_2)$ 且 $diam(G') = diam(G_1) + diam(G_2) - 1$ 則 $rc(G') = diam(G')$ 。

證明：

已知 $rc(G) \geq diam(G)$ [2]，所以 $rc(G') \geq diam(G')$ ，因為 $rc(G_1) = diam(G_1)$ ， $rc(G_2) = diam(G_2)$ 且 $diam(G') = diam(G_1) + diam(G_2) - 1$ ，故 $rc(G_1) + rc(G_2) = diam(G_1) + diam(G_2)$

$$= diam(G') + 1$$

又因為 $rc(G_1) + rc(G_2) - 1 \geq rc(G') \Rightarrow rc(G_1) + rc(G_2) \geq rc(G') + 1$ 所以 $diam(G') + 1 \geq rc(G') + 1 \Rightarrow diam(G') \geq rc(G')$ ，由夾擠得知 $rc(G') = diam(G')$ □

定理 3.3

圖 G' 為圖 G_1 與圖 G_2 的並聯合成圖，且 G_1 或 G_2 其中一個為完全圖，若 $rc(G_1) = diam(G_1)$ ， $rc(G_2) = diam(G_2)$ 且 $diam(G') = diam(G_1) + diam(G_2)$ 則 $rc(G') = diam(G')$ 。

證明：

已知 $rc(G) \geq diam(G)$ [2]，所以 $rc(G') \geq diam(G')$ ，因為 $rc(G_1) = diam(G_1)$ ， $rc(G_2) = diam(G_2)$ 且 $diam(G') = diam(G_1) + diam(G_2)$ ，故 $rc(G_1) + rc(G_2) = diam(G_1) + diam(G_2)$

$$= diam(G')$$

又因為 $rc(G_1) + rc(G_2) \geq rc(G')$ 所以 $diam(G') \geq rc(G')$ ，由夾擠得知 $rc(G') = diam(G')$ □

由定理 3.1、定理 3.2 與定理 3.3 我們可以得知，當兩個彩虹連通數等於直徑的圖形只要符合定理的條件並經過串聯或是並聯後所生成的新的圖形的彩虹連通數會等於直徑；彩虹連通數等於直徑的基本圖形有完全圖(complete)、邊數為偶數的環與路徑三種，故我們可以利用這三種基本圖形生成其他也符合彩虹連通數等於直徑的圖形。

4 結論

本篇論文探討了兩個問題，一、當彩虹連通數等於邊數減 3 時，歸納出有 6 類的特徵，只要圖形符合這 6 類的其中一種，則該圖形的彩虹連通數會等於邊數減 3；二、彩虹連通數等於直徑時的圖形我們也找出了 3 種基本的圖形，只要由這 3 種圖形經過串聯與並聯後所生成的圖形也都會符合彩虹連通數等於直徑。

未來將繼續深入探討若是強彩虹連通數等於邊數減 3 與強彩虹連通數等於直徑時圖形的特徵是否會與現在的圖形有相同特徵抑或是有完全不同的結果。

參考文獻

- [1] Rui Pedro Carpentier, Henry Liu, Manuel Silva, and Teresa Sousa. Rainbow Connection in Hypergraphs. <http://www.cantab.net/users/henry.liu/rc%20hypergraphs.pdf>. 2013.
- [2] Gary Chartrand, Garry L. Johns, Kathleen A. McKeon, Ping Zhang. Rainbow connection in graphs. *Mathematica Bohemica*, Vol. 133 (2008), No. 1, 85—98.
- [3] Dewi Estetikasari, Syafrizal Sy. On the Rainbow Connection for Some Corona Graphs. *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 7, 2013, no. 100, 4975 – 4980
- [4] Annika Heckel, Oliver Riordan. On the threshold for rainbow connection number r in random graphs. 2013. *arXiv:1307.7747v1 [math.CO]*. 2013.
- [5] Hengzhe Li, Xueliang Li, Sujuan Liu. Rainbow connection of graphs with diameter 2. *arXiv:1101.2765v2 [math.CO]*. 2011.
- [6] Xueliang Li, Yongtang Shi, Yuefang Sun. Rainbow Connections of Graphs: A Survey. *Graphs and Combinatorics* (2013) 29:1–38.
- [7] Xueliang Li, Yuefang Sun. On the strong rainbow connection number. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2)* 36(2) (2013), 299–311.
- [8] Syafrizal Sy, Gema Hista Medika, Lyra Yulianti. The Rainbow Connection of Fan and Sun. *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 7, no. 64, 3155 - 3159, 2013.
- [9] Fu-Hsing Wang, Guo-Shi Sung. Rainbow connection number in triangular pyramids. *The 29th Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory*. 2012.
- [10] Fu-Hsing Wang, Ze-Jian Wu. On Finding a Rainbow Connection in a Versatile Pyramid Network. *Master of Business Administration Thesis Master program, Department of Information Management College of Business Chinese Culture University*. 2012.
- [11] 郭大衛, 梁育榮. 卡氏積圖形的彩虹連通數. *國立東華大學應用數學系應用數學碩士班碩士論文*. 2012.