

強彩虹連通逼近最小/最大可能值之圖形

李安鈞, 賴泳伶

國立嘉義大學

資訊工程學系暨研究所

{s1020449, yllai}@mail.ncyu.edu.tw

摘要

對一個連通圖 G 定義邊著色函數(*edge coloring function*) $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ 使得任意兩點間都存在至少一條最短路徑(*shortest-path*)上面每一個邊的顏色均不同, 則稱此著色函數為 G 上的一強彩虹著色函數(*strong rainbow coloring function*)。兩點間所有的最短路徑邊上顏色均不同, 則稱此最短路徑為強彩虹路徑(*strong rainbow path*)。在 G 所有的強彩虹著色函數中最小的 k 值, 稱為圖 G 的最佳強彩虹著色函數(*optimal strong rainbow coloring function*), 此 k 值則稱為圖 G 的強彩虹連通數(*strong rainbow connection number*)。對任意圖 G , 本文證明強彩虹連通數為 $|E(G)|-3$ 或 G 的直徑的充分必要條件。

1 研究背景及目的

有關於圖形著色問題方面的研究, 多數都集中在頂點著色上面, 本文所探討的是一種特殊的邊著色問題。對一個連通圖(*connected graph*) G , 定義其邊著色函數(*edge coloring function*) $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, 其中相鄰的邊可著相同顏色。若一條路徑(*path*)上每個邊的顏色皆不同時, 我們稱此路徑為一彩虹路徑(*rainbow path*), 若 G 中兩點間的最短路徑(*shortest-path*)為彩虹路徑時, 我們稱此路徑為強彩虹路徑(*strong rainbow path*), 若任兩點間均存在一條強彩虹路徑, 則稱此邊著色函數 f 為一強彩虹著色函數(*strong rainbow coloring function*)。在 G 的所有強彩虹著色函數中 k 的最小值則稱為 G 的強彩虹連通數(*strong rainbow connection number*), 以 $src(G)$ 表示。

彩虹連通問題最早是由 Chartrand 等人[4]提出, 之後 Chakraborty 等人[2]證明找出任意圖的彩虹連通數是一個 NP-complete 的問題。目前為止已經有許多人研究過各種圖形的彩虹連通數與強彩虹連通數, 其中彩虹連通數與強彩虹連通數相等的有 complete[4], Tree[4], cycle[4], Sun[13]; 另外還有一些是彩虹連通數與強彩虹連通數不相等的圖形, 例如: Fan [13], Wheel[4],

Petersen graph[4], Hypergraph[1], Triangular pyramids[14], Versatile Pyramid Network[15], Corona Graphs[6], Random graphs[7], Cartesian product[17], Bipartite[3], Random Bipartite[5], Interval Graphs[12]等。

彩虹著色問題可以應用在許多方面, 例如: 在網際網路普及的今日, 大家最在乎的不外乎是網路的安全, 希望資料透過網際網路傳遞的過程中可以有各種安全機制的保護。若將網際網路以圖形表示, 以頂點表示網際網路中的節點, 邊表示兩節點間的傳輸路線, 邊上的顏色表示本段傳輸所使用的安全機制(如防火牆、各種加密方式等)。當資料從一個節點傳送到另一個節點, 為了保護資料的安全每經過一個節點即更換一種安全機制, 並期望在資料傳輸過程中使用到的安全機制都不重複, 這就相當於找出圖形上兩點間的彩虹路徑。又因為每種安全機制都是一種成本的支出, 所以希望能用最少的種類的安全機制來達到目的, 如此最少所需安全機制的種類就相當於「彩虹連通數」。若是我們不僅要求資料在傳遞過程中所經過的安全機制都不相同, 為了爭取時效, 還要求資料要以最短的路徑來傳送, 那麼符合這些條件所需最少的安全機制種類, 就相當於該圖的「強彩虹連通數」。

圖形 G 中任一頂點 v 到其他頂點距離的最大值為該點 v 的離心率(*eccentricity*), 記作 $e(v)$ 。圖 G 中所有頂點離心率的最高值稱為該圖的直徑(*diameter*), 記作 $diam(G)$ 。若點 v 到其他點頂距離的最大值等於 G 的直徑時, 則稱點 v 為圖 G 的外圍點(*peripheral vertex*)。由於圖形的直徑是兩外圍點間最短路徑的長度, 根據定義可以知道, 該圖的強彩虹連通數必定不小於它的直徑。另外我們只要將所有的邊都著上不同顏色, 那麼連通圖中任意兩點間皆會存在強彩虹路徑。所以任意連通圖的強彩虹連通數必不大於邊數。也就是對任意連通圖 G 我們有 $diam(G) \leq src(G) \leq |E(G)|$ 。因此, 除了找出特定圖形的(強)彩虹連通數外, 彩虹連通數與圖形的特徵關係就成為另一個研究方向。已有人研究直徑為 2 的圖形的(強)彩虹連通數[8]。由於樹圖(*tree*)中任兩點間只有一條路徑, 顯而易見的 $src(G) = |E(G)|$ 若且唯若 G 為樹[4]。在[10]提出了

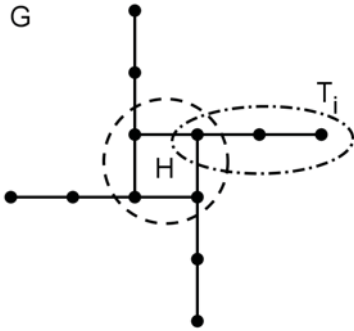
不存在(強)彩虹連通數等於邊數減 1 的圖形之後，[11]刻畫出了(強)彩虹連通數等於邊數減 2 的圖形，[16]則是刻畫出了彩虹連通數的等於直徑的圖形，且於 2013 年 Xueliang Li 等人[9]整理了許多關於(強)彩虹連通相關結果與問題。

本文提出強彩虹連通數等於邊數減 3 及等於直徑的圖形特徵，並證明只有由所提方式所建構出來的圖形，其強彩虹連通數才會符合要求。

2 強彩虹連通數等於邊數減 3

令 v 為圖 G 上一點，所有與 v 相連的頂點個數我們稱為 v 的**分支度(degree)**，以 $\deg(v)$ 表示，圖中分支度為 1 的點稱為**突出點(pendant vertex)**，與他相鄰的邊則稱為**突出邊(pendant edge)**。 G 中所有頂點分支度的最小值與最大值分別以 $\delta(G)$ 及 $\Delta(G)$ 表示。

令 H 為 k 個頂點的連通圖， $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ，且 $\delta(H) \geq 2$ 。令 $T = \{T_i : 1 \leq i \leq k\}$ 為有根(root)樹所成的集合，其中 T_i 的根為 $v_i (1 \leq i \leq k)$ 。令圖 G 為 H 與 T 所合成之圖形，如圖一所示。



圖一: $H = C_4, T_i = P_3 (1 \leq i \leq 4)$ 所合成之圖形 G

定理 2.1 若 G 為 H 與 T 的合成圖，則 $|E(G)| - \text{src}(G) \geq |E(H)| - \text{src}(H)$ 。

證明:

由於樹的強彩虹連通數等於其邊數[4]，令 $f: E(H) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ 為 H 的強彩虹著色函數， $f_i: E(T_i) \rightarrow \{1, 2, \dots, k_i\}$ 為 T_i 的強彩虹著色函數，則

$f': E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k + \sum_{i=1}^{|V(H)|} k_i\}$ 使

$$f'(e) = \begin{cases} f(e), & \forall e \in E(H) \\ f_i(e) + \sum_{j=1}^{i-1} k_j + k, & \forall e \in E(T_i) \end{cases}$$

則 f' 為 G 的一強彩虹著色函數，故 $\text{src}(G)$

$$\leq \text{src}(H) + \sum_{i=1}^k \text{src}(T_i) = \text{src}(H) + \sum_{i=1}^k |E(T_i)|, \text{ 即}$$

$$\begin{aligned} |E(G)| - \text{src}(G) &\geq |E(G)| - \left(\text{src}(H) + \sum_{i=1}^k |E(T_i)| \right) \\ &= |E(G)| - \text{src}(H) - \sum_{i=1}^k |E(T_i)| \\ &= |E(G)| - \sum_{i=1}^k |E(T_i)| - \text{src}(H) \\ &= |E(H)| - \text{src}(H) \end{aligned}$$

□

由定理 2.1 得知，若要求得圖形 G 的邊數與其強彩虹連通數的差，則需要先考慮圖 H ，同時圖形附加樹後只會擴大強彩虹連通數與邊數的差距。

定理 2.2 令 v_0, v_m 為 H 上相異兩點， $P(v_0, v_m) = (v_0 = u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n = v_m)$ 為附加於 v_0, v_m 之間長度為 n 的路徑，其中 $u_i \notin V(H)$ ， $n \in \mathbb{Z}^+$ 且 $1 \leq i \leq n-1$ 。若 $H' = H \cup P$ ，則 $\text{src}(H') \leq \text{src}(H) + |E(P)|$ 。

證明:

令 $f: E(H) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ 為 H 的最佳強彩虹著色函數， $f_p: E(P) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ 為 P 的最佳強彩虹著色函數，則 $f': E(H') \rightarrow \{1, 2, \dots, k+n\}$ 使

$$f'(e) = \begin{cases} f(e), & \forall e \in E(H) \\ f_p(e) + k, & \forall e \in E(P) \end{cases}$$

則 f' 為 H' 的一強彩虹著色函數，故 $\text{src}(H') \leq \text{src}(H) + \text{src}(P) = \text{src}(H) + n = \text{src}(H) + |E(P)|$ □

推論 2.3 令 v_0, v_m 為 H 上相異兩點， $P(v_0, v_m) = (v_0 = u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n = v_m)$ 為附加於 v_0, v_m 之間長度為 n 的路徑，其中 $u_i \notin V(H)$ ， $n \in \mathbb{Z}^+$ 且 $1 \leq i \leq n-1$ 。若 $H' = H \cup P$ ，且 $\text{src}(H) < |E(H)| - 3$ 則 $\text{src}(H') < |E(H')| - 3$ 。

證明:

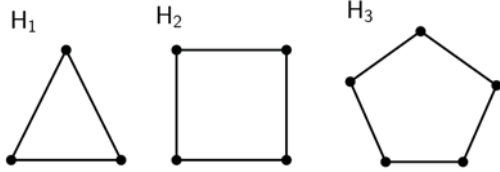
因 $\text{src}(H') \leq \text{src}(H) + |E(P)|$ (定理 2.2) 且 $\text{src}(H) < |E(H)| - 3$ (已知條件) 故 $\text{src}(H') \leq \text{src}(H) + |E(P)| < |E(H)| - 3 + |E(P)| = |E(H')| - 3$ □

想要找出強彩虹連通數等於邊數減 3 的圖形首先我們考慮所有不含突出點的圖形中，強彩虹連通數小於等於邊數減 3 的圖形。

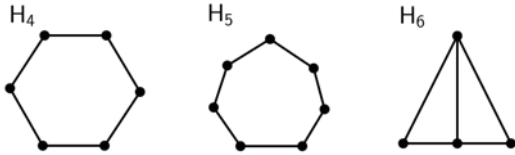
經由暴力法我們知道所有 $|E(H)| = 8$ 且 $\delta(H) \geq 2$ 的圖形的強彩虹連通數均小於邊數減 3，再由推論 2.3 知，我們只需考慮邊數小於 8 的圖形。

在所有 $\delta(H) \geq 2$ 且 $|E(H)| < 8$ 的圖形 H 中，只有圖二中的 H_1, H_2, H_3 其強彩虹連通數大於邊數減 3，另有 H_4, H_5, H_6 (如圖三所示) 其強彩虹連通數恰等於邊數減 3；其餘圖形強彩虹連通數均小於邊數減 3，故不可能造出 $\text{src}(H') < |E(H')| - 3$ 的圖形。

令 $l(T)$ 表示樹圖形 T 中突出點(即葉節點)個數。

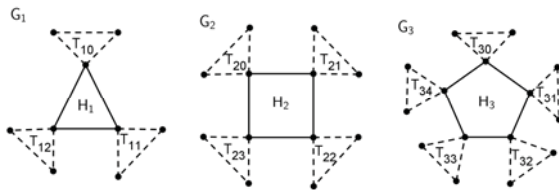


圖二: $|E(H)| \leq 8, \delta(H) \geq 2$ 且 $\text{src}(H) > |E(H)| - 3$ 的圖形



圖三: $|E(H)| \leq 8, \delta(H) \geq 2$ 且 $\text{src}(H) = |E(H)| - 3$ 的圖形

令 $T_i = \{T_{ij} : 0 \leq j < |V(H_i)|\}$, $1 \leq i \leq 3$ 為以 H_i 的頂點為根(root)的樹所成的集合，其中 T_{ij} 的根為 v_{ij} ($1 \leq i \leq 3, 0 \leq j < |V(H_i)|$)。令 G_i 為 H_i ($1 \leq i \leq 3$) 與 T_i ($0 \leq j < |V(H_i)|, 1 \leq i \leq 3$) 所合成之圖形， G_1 至 G_3 如圖四所示。



圖四: H_i ($1 \leq i \leq 3$) 與 T 所合成之圖形

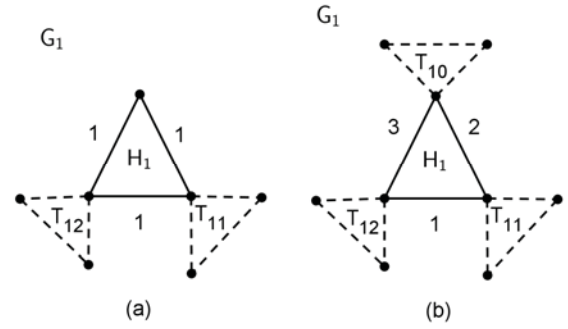
定理 2.4 若 $\text{src}(G_1) = |E(G_1)| - 3$ 若且唯若 $l(T_{1i}) \geq 1$ ($\forall i, 0 \leq i \leq 2$)。

證明:

($\Rightarrow$) 若存在一個 i ($0 \leq i \leq 2$), $l(T_{1i}) = 0$ ，不失一般性，假設 $l(T_{10}) = 0$ ，考慮 H_1 著色方式如圖五(a)所示， T_{11} 、 T_{12} 上其餘的邊分別給予顏色 2 到顏色 $|E(G_1)| - 2$ ，因 T_{1j} 上每個邊的顏色都不同， H_1 只著一種顏色且均與 T_{1j} 上的邊不重複，故共使用

$|E(G_1)| - 2$ 個顏色。又因為 T_{11} 、 T_{12} 上的兩點之間最短路徑必經過 $v_{11} v_{12}$ 邊，故 $v_{11} v_{12}$ 邊所著的顏色不得與 T_{11} 、 T_{12} 上的邊重複，故至少需要使用 $|E(G_1)| - 2$ 個顏色。

($\Leftarrow$) H_1 著色方式如圖五(b)所示， T_{10} 上其中一條突出邊給予顏色 1， T_{11} 上其中一條突出邊給予顏色 3， T_{12} 上其中一條突出邊給予顏色 2， T_{10} 、 T_{11} 、 T_{12} 上其餘的邊分別給予顏色 4 到顏色 $|E(G_1)| - 3$ ，因 T_{1j} 上每個邊的顏色都不同， H_1 上每個邊的顏色均與某個 T_{1j} 上的邊重複，故共使用 $|E(G_1)| - 3$ 個顏色。由於 T_{10} 、 T_{11} 、 T_{12} 上的邊皆不能同色，故 $\text{src}(G_1) = |E(G_1)| - 3$ 。□



圖五: G_1 著色方式

定理 2.5 若 $\text{src}(G_2) = |E(G_2)| - 3$ 若且唯若以下兩個條件均不成立

- (1) $l(T_{20}) \leq 1, l(T_{22}) \leq 1, l(T_{21}) = l(T_{23}) = 0$
- (2) $l(T_{20}) \geq 2, l(T_{21}) \geq 1, l(T_{22}) \geq 0, l(T_{23}) \geq 1$ 。

證明:

($\Rightarrow$)

1. 當 $l(T_{20}) \leq 1, l(T_{22}) \leq 1, l(T_{21}) = l(T_{23}) = 0$ 時，考慮圖六(a)，由於從 v_{20} 到 v_{22} 至少需經過 2 個不同顏色的邊， H_2 中無法使用更少的顏色，所附加的樹中所有顏色亦無法與此 2 色相同，否則 T_{20} 上的點即無法有到 v_{22} 的強彩虹路徑，故最少需使用到 $|E(T_{20})| + |E(T_{22})| + 2 = |E(G_2)| - 2$ 個顏色，即 $\text{src}(G_2) = |E(G_2)| - 2$ 。

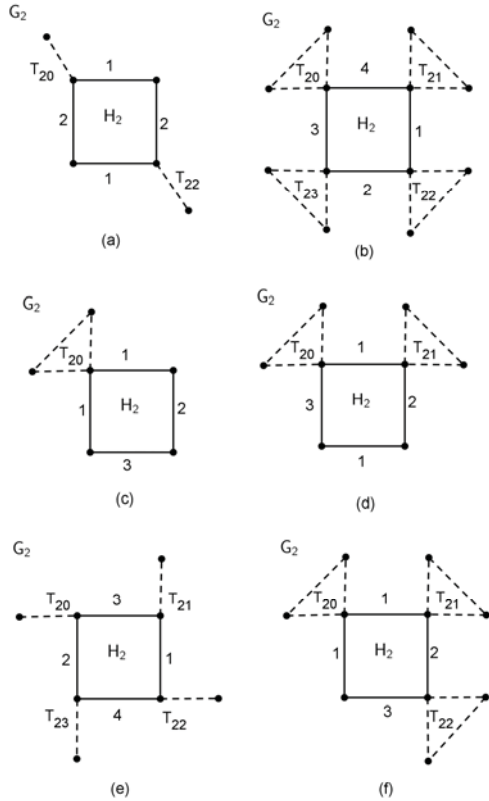
2. 考慮當 $l(T_{20}) \geq 2, l(T_{21}) \geq 1, l(T_{22}) \geq 0, l(T_{23}) \geq 1$ 時， H_2 著色方式如圖六(b)所示， T_{20} 上其中兩條突出邊分別給予顏色 1 與顏色 2， T_{21} 上其中一條突出邊給予顏色 3， T_{23} 上其中一條突出邊給予顏色 4， T_{20} 、 T_{21} 、 T_{23} 上其餘的邊分別給予顏色 5 到顏色 $|E(G_2)| - 4$ ，因 T_{2j} 上每個邊的顏色都不同， H_2 上每個邊的顏色均與某個 T_{2j} 上的邊重複，故共使用 $|E(G_2)| - 4$ 個顏色即可。

($\Leftarrow$) 此處分四種情況考慮

1. 若 $l(T_{20}) \geq 2, l(T_{21}) = l(T_{22}) = l(T_{23}) = 0$ ，則 H_2 著色方式如圖六(c)所示， T_{20} 上其中 2 條突出邊分別

給予顏色 2、3，其餘的邊給予顏色 4 到顏色 $|E(G_2)|-3$ ，因 T_{20} 上每個邊的顏色都不同， H_2 上有兩個邊顏色相同且另外兩個邊顏色與 T_{20} 上的邊重複，故共使用 $|E(G_2)|-3$ 個顏色。

2. 若 $l(T_{20}) \geq 1, l(T_{21}) \geq 1, l(T_{22}) = l(T_{23}) = 0$ ，則 H_2 著色方式如圖六(d)所示， T_{20} 上其中一條突出邊給予顏色 2， T_{21} 上其中一條突出邊給予顏色 3， T_{20} 、 T_{21} 上其餘的邊給予顏色 4 到顏色 $|E(G_2)|-3$ ，因 T_{2j} 上每個邊的顏色都不同， H_2 上有兩個邊顏色相同且另外兩個邊顏色與 T_{2j} 上的邊重複，故共使用 $|E(G_2)|-3$ 個顏色。
3. 若 $l(T_{20}) = l(T_{21}) = l(T_{22}) = 1, l(T_{23}) \leq 1$ ，則 H_2 著色方式如圖六(e)所示， T_{20} 上突出邊給予顏色 1， T_{21} 上突出邊給予顏色 2， T_{22} 上突出邊給予顏色 3， T_{2j} 上其餘的邊分別給予顏色 5 到顏色 $|E(G_2)|-3$ ，因 T_{2j} 上每個邊的顏色都不同， H_2 上有 3 個邊顏色與 T_{2j} 上的邊重複，故共使用 $|E(G_2)|-3$ 個顏色。
4. 若 $l(T_{20}) \geq 2, l(T_{21}) \geq 0, l(T_{22}) \geq 1, l(T_{23}) = 0$ ，則 H_2 著色方式如圖六(f)所示， T_{20} 上其中兩條突出邊分別給予顏色 2 與顏色 3， T_{2j} 上其餘的邊給予顏色 4 到顏色 $|E(G_2)|-3$ ，因 T_{2j} 上每個邊的顏色都不相同， H_2 上有兩個邊顏色相同且另外兩個邊顏色與 T_{2j} 上的邊重複，故共使用 $|E(G_2)|-3$ 個顏色。 $\square$



圖六： G_2 著色方式

定理 2.6 若 $src(G_3) = |E(G_3)|-3$ 若且唯若至少有一個點附加樹，且至少有 2 個相鄰點無附加樹。

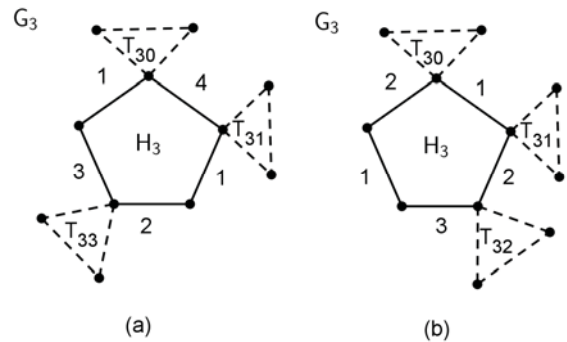
證明：

已知 $src(H_3) = src(C_5) = 3 = |E(H_3)|-2$ ，故附加樹為必要(即 $\exists i$ 使 $l(T_{3i}) \geq 1$)，若 H_3 上所有頂點均有附加樹，則每個 H_3 上的邊均可與其對面 T_{3i} 上的一個突出邊顏色相同(因他不在 T_{3i} 上任意點到其他點的最短路徑上)，故 $src(G_3) \leq |E(G_3)|-5$ ，故矛盾。

若僅有一個 i 使 $l(T_{3i}) = 0$ ，不失其一般性，假設 $l(T_{30}) = 0$ 則 H_3 上除 $v_{32} v_{33}$ 邊之外其餘邊上的顏色均可與其對面 T_{3i} 上的突出邊相同，故 $src(G_3) \leq |E(G_3)|-4$ ，故矛盾。

當有 2 個 H_3 上的頂點沒有附加樹時，有兩種情況需考慮：

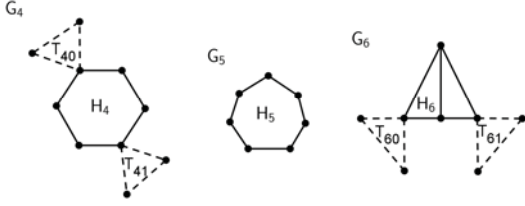
1. 兩個沒有附加樹的頂點不相鄰，不失其一般性，假設 $l(T_{32}) = l(T_{34}) = 0$ ，考慮 H_3 各邊著色如圖七(a)所示，則 T_{30} 上其中一條突出邊給予顏色 2， T_{31} 上其中一條突出邊給予顏色 3， T_{33} 上其中一條突出邊給予顏色 4，因此 $src(G_3) \leq |E(G_3)|-4$ ，故矛盾。
2. 兩個沒有附加樹的頂點相鄰，考慮圖七(b)之著色方式，其中 T_{30} 上其中一條突出邊給予顏色 3，其餘 T_{3j} 上的邊分別給予顏色 4 到顏色 $|E(G_3)|-3$ 。由於 T_{30} 上任一點至 T_{32} 上任一點的最短路徑必須經由 H_3 上 $v_{30} v_{31}$ 與 $v_{31} v_{32}$ 二邊且此二邊的顏色不與 T_{30} 、 T_{32} 相同，又因為 T_{31} 到點 v_{33} 與點 v_{34} 的最短距離必須經過 H_3 上 $v_{33} v_{34}$ 邊以外的邊，故 $v_{30} v_{31}$ 與 $v_{31} v_{32}$ 二邊的顏色亦不可與 T_{31} 相同，且 T_{30} 、 T_{31} 、 T_{32} 上的邊顏色不重複，故 G_3 至少需要使用 $|E(G_3)|-3$ 種顏色。 $\square$



圖七： G_3 著色方式

令 $T_4 = \{T_{4j} : 0 \leq j \leq 1\}$ 為以 H_4 的一組對角頂點為根的樹所成的集合，令 G_4 為 H_4 與 T_4 所合成之圖形； H_5 不與任何的樹合成，即 $G_5 = H_5$ ；令 $T_6 = \{T_{6j} : 0 \leq j \leq 1\}$ 為以 H_6 上分支度為 2 的頂點為

根的樹所成的集合，令 G_6 為 H_6 與 T_6 所合成之圖形， G_4 至 G_6 如圖八所示。



圖八: H_i ($4 \leq i \leq 6$) 與 T 所合成之圖形

定理 2.7 若 $\text{src}(G_4) = |E(G_4)| - 3$ 若且唯若 $l(T_{40}) \leq 1, l(T_{41}) \leq 1$ 。

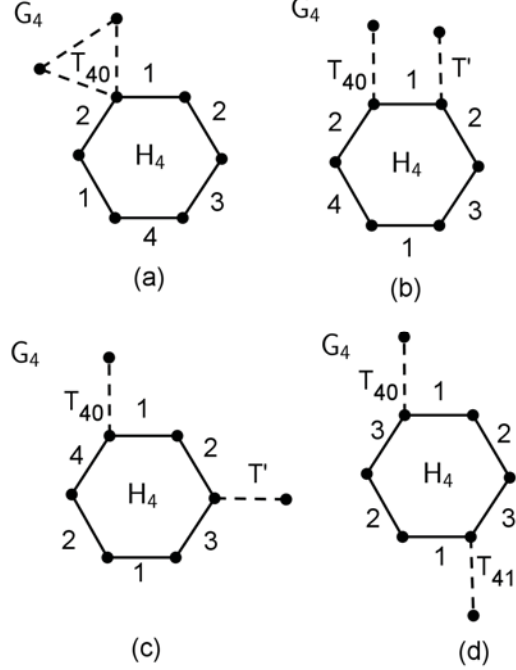
證明:

($\Rightarrow$) 此處分三種情況考慮

1. 若 $l(T_{40}) > 1$ 則 H_4 著色方式如圖九(a)所示， T_{40} 上其中兩條突出邊分別給予顏色 3、4，其餘給予顏色 5 到顏色 $|E(G_4)| - 4$ ，因 T_{40} 上每個邊的顏色都不同， H_4 上有兩組邊的顏色相同，另外兩個邊顏色與 T_{40} 上的邊重複，故共使用 $|E(G_4)| - 4$ 個顏色，再經由推論 2.3 可知若在 H_4 上再附加其他的樹時 $\text{src}(G_4) \leq |E(G_4)| - 4$ 。
2. 若在兩相鄰的點分別附加一個突出點數為 1 的樹時，不失其一般性，我們假設附加的樹為 T_{40}, T' ，其 H_4 著色方式如圖九(b)所示， T_{40} 上一個突出邊給予顏色 3， T' 上一個突出邊給予顏色 4， T_{40} 與 T' 上其餘的邊給予顏色 5 到顏色 $|E(G_4)| - 4$ ，因 T_{40} 與 T' 上每個邊的顏色都不同， H_4 上有兩組邊的顏色相同，另外一個邊顏色與 T_{40} 上的邊重複，一個邊顏色與 T' 上的邊重複，故共使用 $|E(G_4)| - 4$ 個顏色。
3. 若在兩距離為 2 的點分別附加一個突出點數為 1 的樹時，不失其一般性，我們假設附加的樹為 T_{40}, T' ，其 H_4 著色方式如圖九(c)所示， T_{40} 上其中一個突出邊給予顏色 3， T' 上其中一個突出邊給予顏色 4， T_{40} 與 T' 上其餘的邊給予顏色 5 到顏色 $|E(G_4)| - 4$ ，因 T_{40} 與 T' 上每個邊的顏色都不同， H_4 上有兩組邊的顏色相同，另外一個邊顏色與 T_{40} 上的邊重複，一個邊顏色與 T' 上的邊重複，故共使用 $|E(G_4)| - 4$ 個顏色。

($\Leftarrow$) 若在兩距離為 3 的點分別附加一個突出點數為 1 的樹時，不失其一般性，我們假設附加的樹為 T_{40}, T_{41} ，其 H_4 著色方式如圖九(d)所示， T_{40} 與 T_{41} 上的邊分別給予顏色 4 到顏色 $|E(G_4)| - 3$ ，因 T_{40} 與 T_{41} 上每個邊的顏色都不同， H_4 上有三組邊的顏色相同故共使用 $|E(G_4)| - 3$ 個顏色。由於 T_{40} 上任一點至 T_{41} 上任一點的最短路徑必須經由 H_4 上 3 個邊且此三條邊的顏色不與 T_{40} 、 T_{41} 相同，又因為

T_{40} 、 T_{41} 上的邊顏色不重複，故 G_4 至少需要使用 $|E(G_4)| - 3$ 種顏色。 $\square$



圖九: G_4 著色方式

定理 2.8 若 $\text{src}(G_5) = |E(G_5)| - 3$ 若且唯若 $G_5 = H_5 = C_7$ 即 H_5 不與任何 T 合成。

證明:

($\Rightarrow$) 若在 H_5 上一點 v_5 接任何一個 T ，因為 v_5 到 H_5 上任意一點最短距離必小於等於 3，所以與 v_5 距離為 3 的兩點間的邊不會走到，故該條邊的顏色可與 T 重複，所以 $\text{src}(G_5) < |E(G_5)| - 3$ 。

($\Leftarrow$) 已知 $\text{src}(C_7) = \lceil |E(C_7)| / 2 \rceil = 4 = |E(C_7)| - 3$ 故 $\text{src}(G_5) = |E(G_5)| - 3$ 。 $\square$

定理 2.9 若 $\text{src}(G_6) = |E(G_6)| - 3$ 若且為若 $l(T_{60}) \leq 1, l(T_{61}) \leq 1$ 。

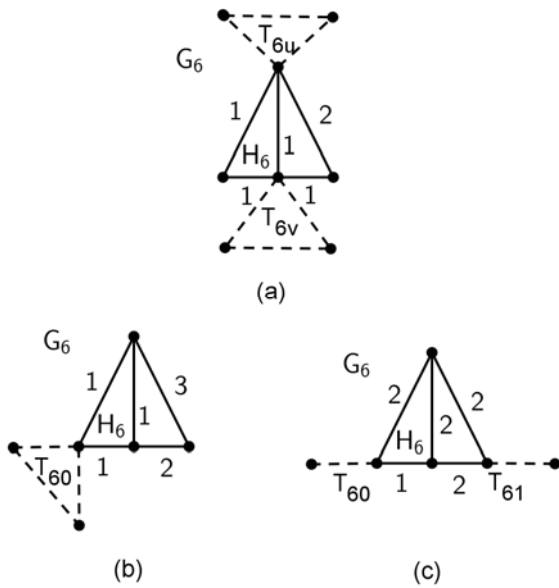
證明:

($\Rightarrow$) 此處分兩種情況考慮

1. 若在 H_6 上分支度為 3 的兩點 u, v 上接 T_{6u}, T_{6v} ，則 H_6 著色方式如圖十(a)所示， T_{6u} 上其中一條突出邊給予顏色 2， T_{6u} 與 T_{6v} 上其餘的邊分別給予顏色 3 到顏色 $|E(G_6)| - 4$ ，因 T_{6u} 與 T_{6v} 上每個邊的顏色都不同，且 H_6 上有 4 個邊的顏色相同，另外一個邊的顏色與 T_{6v} 重複，故總共使用 $|E(G_6)| - 4$ 個顏色。
2. 若 $l(T_{60}) \geq 2$ 則 H_6 著色方式如圖十(b)所示，在 T_{60} 上其中兩個突出邊分別給予顏色 2、3， T_{60} 其餘的邊給予顏色 4 到顏色 $|E(G_6)| - 4$ ，因 H_6 上有三個邊的顏色相同，另外兩個邊的顏色與 T_{60} 重複，故總共使用 $|E(G_6)| - 4$ 個顏色，再經由推論

2.3 可知若在 H_6 上再附加其他的樹時 $src(G_6) \leq |E(G_6)| - 4$ 。

($\Leftarrow$) 將 H_6 著色方式如圖十(c)所示, T_{6j} 上的邊分別給予顏色 3 到顏色 $|E(G_6)| - 3$, 因 T_{6j} 上每個邊的顏色都不同, H_6 上有四個邊的顏色相同, 故總共使用 $|E(G_6)| - 3$ 個顏色。由於 T_{60} 上任一點至 T_{61} 上任一點的最短路徑必須經由 H_6 上兩個邊且此兩條邊的顏色不與 T_{60} 、 T_{61} 相同, 又因為 T_{60} 、 T_{61} 上的邊顏色不重複, 故 G_6 至少需要使用 $|E(G_6)| - 3$ 種顏色。 $\square$



圖十: G_6 著色方式

我們歸納出六類的圖形, 有符合這六類的其中之一類時該圖形的強彩虹連通數才會等於邊數減 3。

3 強彩虹連通數等於直徑

令 v 為連通圖 G 上一點, 若 v 到其他頂點距離的最大值等於 G 的直徑時, 則點 v 稱為圖 G 的**外圍點(peripheral)**。

令 $v \in V(G_1)$, $u \in V(G_2)$, 使 $v=u$ 且 $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$, $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ 則稱 G 為 G_1 與 G_2 的**串聯合成圖(series connection)**, 表示為 $G = G_1 \triangleright \triangleleft G_2$ 。

令 $vv' \in E(G_1)$, $uu' \in E(G_2)$ 使得 $vv' = uu'$ 且 $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$, $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$, 則稱 G' 為 G_1 與 G_2 的**並聯合成圖(parallel connection)**, 表示為 $G' = G_1 \triangleleft \triangleright G_2$ 。

定理 3.1 若 G 為 G_1 與 G_2 的串聯合成圖或是並聯合

成圖, 則 $src(G_1) + src(G_2) \geq src(G)$ 。

證明:

假設 $src(G_1) = k_1$, $src(G_2) = k_2$ 且 $f_1: E(G_1) \rightarrow \{1, 2, \dots, k_1\}$, $f_2: E(G_2) \rightarrow \{1, 2, \dots, k_2\}$ 為 G_1 與 G_2 的最佳強彩虹著色函數,

1. 若 $G = G_1 \triangleright \triangleleft G_2$, 定義 $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k_1 + k_2\}$ 使得

$$f(e) = \begin{cases} f_1(e), & \forall e \in E(G_1) \\ f_2(e) + k_1, & \forall e \in E(G_2) \end{cases}$$

則 f 為 G 的強彩虹著色函數。

2. 若 $G = G_1 \triangleleft \triangleright G_2$, 且 $e_1 = e_2$, $e_1 \in E(G_1)$, $e_2 \in E(G_2)$, 不失一般性令 $f_1(e_1) = k_1$, $f_2(e_2) = 1$ 定義 $f': E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k_1 + k_2\}$ 使得

$$f'(e) = \begin{cases} f_1(e), & \forall e \in E(G_1) \\ f_2(e) + k_1, & \forall e \in E(G_2) \text{ and } e \neq e_2 \end{cases}$$

則 f' 為 G 的強彩虹著色函數。

由 f 與 f' 知不論 $G = G_1 \triangleright \triangleleft G_2$ 或是 $G = G_1 \triangleleft \triangleright G_2$, $src(G) \leq k_1 + k_2 = src(G_1) + src(G_2)$ $\square$

定理 3.2 若 $G = G_1 \triangleright \triangleleft G_2$ 且 $src(G_1) = diam(G_1)$, $src(G_2) = diam(G_2)$ 則當 v 為 G_1 的外圍點且為 G_2 的外圍點時 $src(G) = diam(G)$ 。

證明:

因為 $src(G_1) = diam(G_1)$, $src(G_2) = diam(G_2)$ 且 $diam(G) = diam(G_1) + diam(G_2)$ 所以 $src(G_1) + src(G_2) = diam(G_1) + diam(G_2)$

$$= diam(G)$$

由定理 3.1 得知 $src(G_1) + src(G_2) \geq src(G)$ 所以 $diam(G) \geq src(G)$, 而且 $src(G) \geq diam(G)$ [4], 所以由夾擠得知 $src(G) = diam(G)$ $\square$

定理 3.3 若 $G' = G_1 \triangleleft \triangleright G_2$ 且 $src(G_1) = diam(G_1)$, $src(G_2) = diam(G_2)$ 則當 $diam(G') = diam(G_1) + diam(G_2) - 1$ 時 $src(G') = diam(G')$ 。

證明:

因為 $src(G_1) = diam(G_1)$, $src(G_2) = diam(G_2)$ 且 $diam(G') = diam(G_1) + diam(G_2) - 1$, 故

$$src(G_1) + src(G_2) = diam(G_1) + diam(G_2) = diam(G') + 1$$

由定理 3.1 得知 $src(G_1) + src(G_2) \geq src(G')$ 且並聯的邊可以重複一種顏色所以 $src(G_1) + src(G_2) - 1 \geq src(G') \Rightarrow src(G_1) + src(G_2) \geq src(G') + 1$ 所以 $diam(G') + 1 \geq src(G') + 1 \Rightarrow diam(G') \geq src(G')$, 而且 $src(G) \geq diam(G)$ [4], 由夾擠得知 $src(G') = diam(G')$ $\square$

定理 3.4 若 $G' = G_1 \triangleleft G_2$, G_1 或 G_2 其中一個為完全圖, 且 $\text{src}(G_1) = \text{diam}(G_1)$, $\text{src}(G_2) = \text{diam}(G_2)$ 則當 $\text{diam}(G') = \text{diam}(G_1) + \text{diam}(G_2)$ 時 $\text{src}(G') = \text{diam}(G')$ 。

證明:

因為 $\text{src}(G_1) = \text{diam}(G_1)$, $\text{src}(G_2) = \text{diam}(G_2)$ 且 $\text{diam}(G') = \text{diam}(G_1) + \text{diam}(G_2)$, 故 $\text{src}(G_1) + \text{src}(G_2) = \text{diam}(G_1) + \text{diam}(G_2) = \text{diam}(G')$

由定理 3.1 得知 $\text{src}(G_1) + \text{src}(G_2) \geq \text{src}(G')$ 所以 $\text{diam}(G') \geq \text{src}(G')$ 又因為 $\text{src}(G) \geq \text{diam}(G)$ [4] , 所以 $\text{src}(G') \geq \text{diam}(G')$, 由夾擠得知 $\text{src}(G') = \text{diam}(G')$ □

由定理 3.2、定理 3.3 與定理 3.4 我們可以得知, 當兩個強彩虹連通數等於直徑的圖形只要符合定理的條件並經過串聯或是並聯後所生成新圖形的強彩虹連通數會等於直徑; 強彩虹連通數等於直徑的基本圖形有完全圖(complete)、邊數為偶數的環與路徑三種, 故我們可以利用這三種基本圖形生成其他也符合強彩虹連通數等於直徑的圖形。

4 結論

本篇論文探討了兩個問題, 一、當強彩虹連通數等於邊數減 3 時, 歸納出有六類的圖形特徵, 當圖形符合這六類的其中一種, 則該圖形的強彩虹連通數會等於邊數減 3 且所有強彩虹連通數為邊數減 3 的圖形必可描述為那六類之一, 也就是對任意圖形 G , 將所有點的附加樹去除後所形成的圖 G' 其邊數若大於等於 8 或不為 H_1 到 H_6 中任一圖時, 其強彩虹連通數必小於邊數減 3, 若 G' 為 H_1 到 H_6 中任一圖時, 則依定理 2.4 到定理 2.9 即可判斷該圖之強彩虹連通數是否為邊數減 3。二、我們也找出了三種基本的圖形其強彩虹連通數等於直徑, 只要由這三種圖形經過串聯與並聯後所生成的圖形也都會符合彩虹連通數等於直徑。

參考文獻

- [1] Rui Pedro Carpentier, Henry Liu, Manuel Silva, and Teresa Sousa. Rainbow connection for some families of hypergraphs. *Discrete Mathematics* 327, 40-50, 28 July 2014.
- [2] Sourav Chakraborty, Eldar Fischer, Arie Matsliah, Raphael Yuster. Hardness and algorithms for rainbow connection. *Journal of Combinatorial Optimization*, 1-18, 2009.
- [3] Gary Chartrand, Garry L. Johns, Kathleen A. McKeon, Ping Zhang. The Rainbow Connectivity of a Graph. *Networks*, 54(2), 75-81, 2009.
- [4] Gary Chartrand, Garry L. Johns, Kathleen A. McKeon, Ping Zhang. Rainbow connection in graphs. *Mathematica Bohemica*, 133(1), 85-98, 2008.
- [5] Xiaolin Chen, Xueliang Li, Huishu Lian. Rainbow k-connectivity of random bipartite graphs. *arXiv:1212.6115v1 [math.CO]*, 26 Dec 2012.
- [6] Dewi Estetikasari, Syafrizal Sy. On the Rainbow Connection for Some Corona Graphs. *Applied Mathematical Sciences*, 7(100), 4975-4980, 2013.
- [7] Annika Heckel, Oliver Riordan. On the threshold for rainbow connection number r in random graphs. *arXiv:1307.7747v1 [math.CO]*, 2013.
- [8] Hengzhe Li, Xueliang Li, Sujuan Liu. Rainbow connection of graphs with diameter 2. *arXiv:1101.2765v2 [math.CO]*, 2011.
- [9] Xueliang Li, Yongtang Shi, Yuefang Sun. Rainbow Connections of Graphs: A Survey. *Graphs and Combinatorics*, 29, 1-38, 2013.
- [10] Xueliang Li, Yuefang Sun. On the strong rainbow connection number. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2)* 36(2), 299-311, 2013.
- [11] Xueliang Li, Yuefang Sun, Yan Zhao. Characterize graphs with rainbow connection number $m-2$ and $m-3$. *arXiv:1312.3068v1 [math.CO]*, 11 Dec 2013.
- [12] Dr. A. Sudhakaraiah, A. Sreenivasulu, E. Ghana Deepika, V. Rama Latha. To Find the Equality of the Rainbow Connection Number towards the Diameter using Interval Graphs. *International Refereed Journal of Engineering and Science (IRJES)* 2319-1821, 2(4), 15-21, April 2013.
- [13] Syafrizal Sy, Gema Hista Medika, Lyra Yulianti. The Rainbow Connection of Fan and Sun. *Applied Mathematical Sciences*, 7(64), 3155-3159, 2013.
- [14] Fu-Hsing Wang, Guo-Shi Sung. Rainbow connection number in triangular pyramids.

Proceedings of the 29th Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory. 73-76, 2012.

- [15] Fu-Hsing Wang, Ze-Jian Wu. *On Finding a Rainbow Connection in a Versatile Pyramid Network*. Master Thesis of Business Administration, Department of Information Management College of Business Chinese Culture University, 2012.
- [16] 李安鈞, 賴泳伶. 彩虹連通在導覽路線上的應用. *The 31st Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory*. 43-147, 2014.
- [17] 梁育榮. 卡氏積圖形的彩虹連通數. 碩士論文, 國立東華大學應用數學系, 2012.