

弦環圖的開放定位統治集合*

白恭瑞⁺，鄭宇翔

明志科技大學工業工程與管理系

poter@mail.mcut.edu.tw a555sanley@gmail.com

摘要

圖 $G = (V(G), E(G))$ 的開放定位統治集合 S ，需同時滿足(i)圖 G 中的每一個頂點 $v \in V(G)$ ， $N(v) \cap S \neq \emptyset$ ，(ii)圖 G 中的任意兩個頂點 v 與 w ， $N(v) \cap S \neq N(w) \cap S$ 。開放定位統治集合數 $\gamma_{OLD}(G)$ 為開放定位統治集合的最小基數。本文針對弦環圖 $CR(n, 2)$ 與 $CR(n, 3)$ 探討開放定位統治集合。我們發現 $CR(6, 2)$ 與 $CR(8, 3)$ 不存在開放定位統治集合。接著，提出放置統治點的演算法來求出 $\gamma_{OLD}(CR(n, 2))$ 的上界，並證明 $\gamma_{OLD}(CR(5, 2))$ 與 $\gamma_{OLD}(CR(8, 2))$ 的精確值。最後，提出 $\gamma_{OLD}(CR(n, 3))$ 的上界，當 $n \geq 9$ 且 $n \equiv 0 \pmod{3}$ ，及證明 $\gamma_{OLD}(CR(7, 3))$ 的精確值。

關鍵詞：統治、定位統治集合、開放定位統治集合、弦環圖

1. 簡介

令圖 $G = (V(G), E(G))$ 是一個有限、簡單、無向圖，而 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分別代表圖 G 的頂點集合及邊集合。一個頂點集合 $D \subseteq V(G)$ 被稱為統治集合(dominating set)，若對每一個頂點 $v \in V(G) \setminus D$ ，而頂點 v 至少有一個相鄰頂點在集合 D 中。支配問題(domination problem)及其相關變型的問題已被廣泛的研究，請參閱[3, 4]。

在1975年，Slater介紹了定位集合(Locating set)[10]，是考量偵測設備可以測得入侵者的距離。在[11, 12]中，把統治與定位這兩個觀點結合起來一併考量，而放置偵測設備的頂點則稱為統治點。當在圖 G 的頂點 v 放置偵測設備，則可以偵測到以下兩種狀況。狀況1，入侵者進入頂點 v ，設備能偵測到並得知其位置。狀況2，入侵者進入頂點 v 的相鄰點，設備雖能偵測到有人入侵，但無法確認進入那一個相鄰點。因此，為解決狀況2的問題，圖 G 中必需放入更多的設備，直接以狀況1來偵測，或是由入侵位置的相鄰點設備以交集方式來決定入侵位置。而這個問題後續也產生多種的變型。有關定位統治集合(locating-dominating sets)已整理超過150多篇論文，目前有Lobstein維護[5]。

在2010年，Seo和Slater將上述的問題加上新的條件[8]，入侵者若發現進入點有偵測設備，則會將它破壞。因此，要發現入侵者就僅能依靠相鄰點的設備以交集方式來決定入侵位置。令 $N(v)$ 代表頂點 v 的開放鄰域，其 $N(v) = \{w \in V(G) : vw \in E(G)\}$ 。Seo和Slater定義了圖 G 的開放定位統治集合(open-locating-dominating sets) S ，以下簡稱OLD集合，需滿足以下2條規則：

規則1：對圖 G 中的每一個頂點 $v \in V(G)$ ， $N(v) \cap S \neq \emptyset$ 。

規則2：對圖 G 中的任意兩個頂點 v 與 w ， $N(v) \cap S \neq N(w) \cap S$ 。

接著，Seo和Slater定義了開放定位統治集合數(open-locating-dominating number) $\gamma_{OLD}(G)$ 為OLD集合的最小基數。當一個OLD集合其集合基數等於 $\gamma_{OLD}(G)$ ，則被稱為 $\gamma_{OLD}(G)$ 集合。

我們以圖1中的圖 H 為例說明，OLD集合 $S = \{v_0, v_1, v_4, v_5\}$ ，顯而易見的，滿足上述的規則1。而 $N(v_0) \cap S = \{v_1\}$ 、 $N(v_1) \cap S = \{v_0\}$ 、 $N(v_2) \cap S = \{v_0, v_1, v_4\}$ 、 $N(v_3) \cap S = \{v_1, v_4, v_5\}$ 、 $N(v_4) \cap S = \{v_5\}$ 、 $N(v_5) \cap S = \{v_4\}$ 、 $N(v_6) \cap S = \{v_0, v_4, v_5\}$ 、 $N(v_7) \cap S = \{v_0, v_1, v_5\}$ ，圖 H 中任意兩個頂點，其開放鄰域與 S 交集都不相同，也滿足了規則2。其實， S 是一個 $\gamma_{OLD}(H)$ 集合，即 $\gamma_{OLD}(H) = 4$ ，我們稍後會在第三節中提出證明。

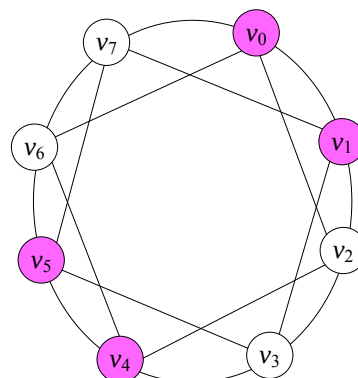


圖1：圖 H ，其 $\gamma_{OLD}(H) = |\{v_0, v_1, v_4, v_5\}| = 4$ ，紅點代表放置偵測設備的統治點。

*本篇論文接受科技部編號MOST 105-2221-E-131-027研究計畫經費補助

+通訊作者

從2010年起，首先由Seo和Slater[8]提出OLD集合問題，並證明了在一般圖形上是屬於NP-Complete問題。接著，他們針對樹狀圖(Trees，以下以 T_n 來代表 n 個頂點的樹)提出 $\lceil n/2 \rceil + 1 \leq \gamma_{OLD}(T_n) \leq n-1$ 的成果。最後對不同類型的無限格狀圖(Infinite Grids)提出小密度OLD集合。隔年他們在Discrete Applied Mathematics期刊中，繼續在樹狀圖上探討OLD集合[9]，分別提出 $\gamma_{OLD}(T_n)$ 等於下界 $\lceil n/2 \rceil + 1$ 及上界 $n-1$ 時，這些 T_n 的特性。在2015年，Pandey[7]證明了OLD集合問題在完美消除二分圖(perfect elimination bipartite graphs)及一個二分圖(bipartite graphs)的子類別皆屬於NP-Complete問題。接著，他提出在鏈圖(chain graphs)及一個完美消除二分圖的子類別上可以在多項式時間求解OLD集合。此外，他證明了對一般圖其 $\gamma_{OLD}(G) \geq 2n / (\Delta(G) + 2)$ ， $\Delta(G)$ 代表圖 G 的最大分支度，並提出此問題的 $(\Delta(G)+2)/2$ -近似演算法。最後，他證明OLD集合問題在最大分支度4的弦圖(Chordal graphs)上是APX-Complete問題。在2017年，Panda和Pandey[6]證明了OLD集合問題在二分圖、平面圖(planar graphs)、拆分圖(split graphs)和雙弦圖(doubly chordal graphs)也是屬於NP-Complete問題。接著，他們提出有界樹寬圖(bounded tree-width graphs)可以在線性時間求解OLD集合。此外，他們提出OLD集合問題的 $(2+3\ln \Delta(G))$ -近似演算法。最後，他們證明OLD集合問題在最大分支度3的二分圖上是APX-Complete問題。

本文，我們將針對弦環圖(Chordal Ring，以下簡稱 $CR(n, k)$ 來求解OLD集合，第二節將介紹弦環圖的定義及後續會使用的到觀察與推論。第三、四節將分別針對弦環圖 $CR(n, 2)$ 與 $CR(n, 3)$ 求解OLD集合，並提出 $\gamma_{OLD}(CR(n, 2))$ 與 $\gamma_{OLD}(CR(n, 3))$ 的上界。第五節提出結論及未來工作。

2. 初步準備工作

弦環圖 $CR(n, k)$ 是環形網路(ring networks，也被稱為distributed loop networks)的一種變型，在原有的環形網路加上額外的邊以強化可靠度與容錯性[1, 2]。參數 n 表示圖形的頂點個數，而 $V(CR(n, k)) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ ， $E(CR(n, k)) = \{v_i v_j \mid [i - j]_n = 1 \text{ 或 } k\}$ ，其中 $[x]_y$ 代表 x 除以 y 取餘數。為了確保每個頂點都有4個相鄰點，我們假設 $k < n/2$ 。例如：圖1為 $CR(8, 2)$ 的圖形。

觀察1[8]. 圖 G 存在OLD集合，若且為若圖 G 的最小分支度 ≥ 1 且圖 G 中的任意兩個頂點 v 與 w ，其 $N(v) \neq N(w)$ 。

依觀察1，圖 $CR(6, 2)$ 的頂點 v_i 與 v_{i+3} ，其 $N(v_i) = N(v_{i+3})$ ，當 $i \in \{0, 1, 2\}$ 。而圖 $CR(8, 3)$ 的頂點 v_i 與 v_{i+4} ，其 $N(v_i) = N(v_{i+4})$ ，當 $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ 。所以，以下的推論2直接成立。

推論2. 圖 $CR(6, 2)$ 與 $CR(8, 3)$ 不存在OLD集合。

觀察3[8]. 若 $\gamma_{OLD}(G) = h$ ，則 $|V(G)| \leq 2^h - 1$ 。

依觀察3，我們可以依圖 G 的頂點數來反向推算 $\gamma_{OLD}(G)$ 的下界，如以下的推論4。

推論4. $\gamma_{OLD}(G) \geq \log_2(|V(G)| + 1)$ 。

3. 弦環圖 $CR(n, 2)$ 的OLD集合

在第2節已假設 $k < n/2$ ，因此本節的 $CR(n, 2)$ 的 $n \geq 5$ 。首先，弦環圖 $CR(5, 2)$ 為特例，我們描述於下。

輔助定理5. $\gamma_{OLD}(CR(5, 2)) = 4$ 。

證明. $CR(5, 2)$ 同構於完全圖 K_5 ，即5個頂點的圖且任意2個頂點都有連邊。我們先藉由給定OLD集合 $S = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ 來證明 $\gamma_{OLD}(CR(5, 2)) \leq 4$ 。因為 $N(v_0) \cap S = \{v_1, v_2, v_3\}$ 、 $N(v_1) \cap S = \{v_0, v_2, v_3\}$ 、 $N(v_2) \cap S = \{v_0, v_1, v_3\}$ 、 $N(v_3) \cap S = \{v_0, v_1, v_2\}$ 和 $N(v_4) \cap S = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ ，可得知OLD集合 S 同時滿足規則1與規則2。

由推論4可算出 $\gamma_{OLD}(CR(5, 2)) \geq 3$ ，但我們要證明只選取3個統治點會違反規則2。因為在完全圖 K_5 下，只選取3個統治點代表圖中存在2個非統治點，而這2個非統治點都會連邊到同樣的3個統治點，即違反規則2。□

依推論2，圖 $CR(6, 2)$ 不存在OLD集合。因此，當 $n \geq 7$ ，我們針對弦環圖 $CR(n, 2)$ 提出求解OLD集合的演算法，這個方法的基本精神是以連續4個頂點為一組，一組中選擇特定頂點設定為統治點，如演算法OLD_CR2A。但，當 $n \equiv 2 \pmod{4}$ 時，我們必需修正最後3個頂點的統治點位置，如演算法OLD_CR2B。

Algorithm OLD_CR2A

Input: A $CR(n, 2)$ which $n \bmod 4 \neq 2$ and $n \geq 7$

Output: A OLD-set S for $CR(n, 2)$.

$S \leftarrow \emptyset$;

For $i = 0$ to $n - 1$ do

If $i \bmod 4 = 0$ or $i \bmod 4 = 1$ then $S \leftarrow S \cup \{v_i\}$;

End for

Algorithm OLD_CR2BInput: A $CR(n, 2)$ which $n \bmod 4 = 2$ and $n \geq 7$ Output: A OLD-set S for $CR(n, 2)$. $S \leftarrow \emptyset$;For $i = 0$ to $n - 4$ do If $i \bmod 4 = 0$ or $i \bmod 4 = 1$ then $S \leftarrow S \cup \{v_i\}$;

End for

 $S \leftarrow S \cup \{v_{n-3}, v_{n-2}\}$;

定理6. 當 $n \geq 7$, $CR(n, 2)$ 的定位統治集合數上界如下：

- i) $\gamma_{OLD}(CR(n, 2)) \leq n/2 + 1$, 若 $n \equiv 2 \pmod{4}$,
- ii) $\gamma_{OLD}(CR(n, 2)) \leq \lceil n/2 \rceil$, 在其他情況下。

證明.

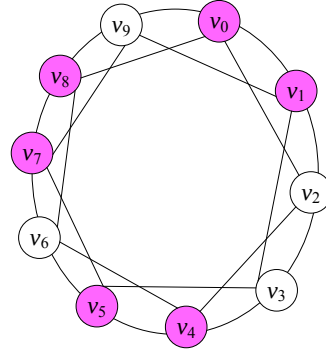
情況1. $n \equiv 0 \pmod{4}$, 依演算法OLD_CR2A的所解出的OLD集合 S 中, 任意頂點 v 其開放鄰域 $N(v)$ 至少存在一個統治點, 滿足規則1。以下敘述中的 i 值其範圍為 $0 \leq i \leq n-1$, 且頂點編號的加、減運算都有除以 n 取餘數。 $N(v_i) \cap S = \{v_{i+1}\}$ 當 $i \bmod 4 = 0$, $N(v_i) \cap S = \{v_{i-1}\}$ 當 $i \bmod 4 = 1$, $N(v_i) \cap S = \{v_{i-2}, v_{i-1}, v_{i+2}\}$ 當 $i \bmod 4 = 2$, 和 $N(v_i) \cap S = \{v_{i-2}, v_{i+1}, v_{i+2}\}$ 當 $i \bmod 4 = 3$ 。任意兩個頂點 v 與 w , 其 $N(v) \cap S \neq N(w) \cap S$, 也滿足規則2。依演算法OLD_CR2A, 連續4個頂點會選出2個統治點, 因此 $|S| = n/2$ 。

情況2. $n \equiv 1 \pmod{4}$, 證明方式類似情況1, 不同之處在於 $N(v_0) \cap S = \{v_1, v_{n-1}\}$, $N(v_1) \cap S = \{v_0, v_{n-1}\}$ 和 $N(v_{n-1}) \cap S = \{v_0, v_1\}$, OLD集合 S 依然同時滿足規則1與2, 而 $|S| = \lceil n/2 \rceil$ 。

情況3. $n \equiv 3 \pmod{4}$, 證明方式類似情況1, 不同之處在於 $N(v_0) \cap S = \{v_1, v_{n-2}\}$, $N(v_{n-2}) \cap S = \{v_0, v_{n-3}\}$ 和 $N(v_{n-1}) \cap S = \{v_0, v_1, v_{n-3}, v_{n-2}\}$, OLD集合 S 依然同時滿足規則1與2, 而 $|S| = \lceil n/2 \rceil$ 。

情況4. $n \equiv 2 \pmod{4}$, 採用的是演算法OLD_CR2B, 證明方式類似情況1, 但有較多的不同之處, 在於 $N(v_0) \cap S = \{v_1, v_{n-2}\}$, $N(v_{n-5}) \cap S = \{v_{n-6}, v_{n-3}\}$, $N(v_{n-4}) \cap S = \{v_{n-6}, v_{n-5}, v_{n-3}, v_{n-2}\}$, $N(v_{n-3}) \cap S = \{v_{n-5}, v_{n-2}\}$, $N(v_{n-2}) \cap S = \{v_0, v_{n-3}\}$ 和 $N(v_{n-1}) \cap S = \{v_0, v_1, v_{n-3}, v_{n-2}\}$, OLD集合 S 依然同時滿足規則1與2, 而 $|S| = n/2 + 1$ 。□

舉例說明, 圖1中的圖 H 其實就是 $CR(8, 2)$, 可以從圖中看出演算法OLD_CR2A如何挑選OLD集合 S , 說明的部份已於第1節描述。接著, 再以圖2的 $CR(10, 2)$ 來看出演算法OLD_CR2B如何挑選OLD集合 S , 因為頂點個數較多, 我們直接整理在表1, 以方便讀者來看OLD集合 S 是如何同時滿足規則1與規則2。

圖2: $CR(10, 2)$, 紅點代表放置偵測設備的統治點。表1: 在 $CR(10, 2)$ 圖中, 依演算法OLD_CR2B求解的OLD集合 S 與每一個頂點開放鄰域的交集。

頂點 v	$N(v) \cap S$	頂點 v	$N(v) \cap S$
v_0	$\{v_1, v_8\}$	v_5	$\{v_4, v_7\}$
v_1	$\{v_0\}$	v_6	$\{v_4, v_5, v_7, v_8\}$
v_2	$\{v_0, v_1, v_4\}$	v_7	$\{v_5, v_8\}$
v_3	$\{v_1, v_4, v_5\}$	v_8	$\{v_0, v_7\}$
v_4	$\{v_5\}$	v_9	$\{v_0, v_1, v_7, v_8\}$

依推論4與定理6, 圖 $CR(8, 2)$ 的 $\gamma_{OLD}(CR(8, 2))$ 的下界與上界相等, 因此, 以下的推論直接成立。

推論7. $\gamma_{OLD}(CR(8, 2)) = 4$ 。

4. 弦環圖 $CR(n, 3)$ 的OLD集合

在第2節已假設 $k < n/2$, 因此本節的 $CR(n, 3)$ 的 $n \geq 7$ 。弦環圖 $CR(7, 3)$ 與 $CR(10, 3)$ 的OLD集合為特例, 我們分別描述於輔助定理8與9。

輔助定理8. $\gamma_{OLD}(CR(7, 3)) = 4$ 。

證明. 我們先藉由給定OLD集合 $S = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}$ 來證明 $\gamma_{OLD}(CR(7, 3)) \leq 4$ 。因為 $N(v_0) \cap S = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}$, $N(v_1) \cap S = \{v_4\}$, $N(v_2) \cap S = \{v_1, v_3, v_6\}$, $N(v_3) \cap S = \{v_4, v_6\}$, $N(v_4) \cap S = \{v_1, v_3\}$, $N(v_5) \cap S = \{v_1, v_4, v_6\}$ 和 $N(v_6) \cap S = \{v_3\}$, 可得知OLD集合 S 同時滿足規則1與規則2。

由推論4可算出 $\gamma_{OLD}(CR(7, 3)) \geq 3$, 但我們要證明只選取3個統治點會無法同時滿足規則1與規則2。我們將統治點的位置來分成以下3種情況分別證明。

情況1. 依頂點編號連續選3個統治點放入 S , 如圖3(a), $N(x) \cap S = N(y) \cap S$, 違反規則2。

情況2. 依頂點編號而任意2個統治點的編號都不連續下, 選3個統治點放入 S 。而這種選取方法必同構於圖3(b), $N(x) \cap S = \emptyset$, 違反規則1。

情況3. 排除情況1與情況2後，只剩2個統治點的編號連續，但另1個統治點不連續。而這種選取方法同構於圖3(c)或(d)，而在這兩個圖中 $N(x) \cap S = N(y) \cap S$ ，違反規則2。

因此， $\gamma_{OLD}(CR(7, 3)) > 3$ $\square$

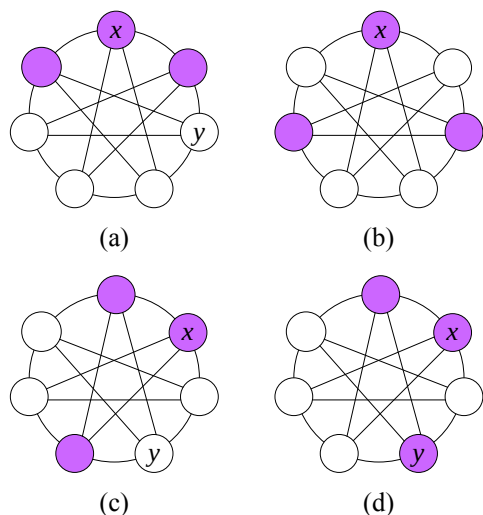


圖3： $CR(7, 3)$ 放置統治點的示意圖，紅點代表放置偵測設備的統治點。

輔助定理9. $\gamma_{OLD}(CR(10, 3)) \leq 8$ 。

證明. 我們藉由給定 OLD 集合 $S = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ 來得證。如圖4，因為頂點個數較多，我們將每個頂點與 OLD 集合 S 的交集整理在表2，藉此可以看出同時滿足規則1與規則2。 $\square$

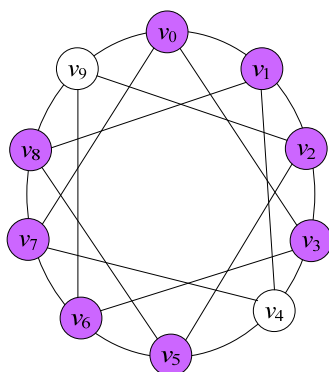


圖4： $CR(10, 3)$ ，紅點代表放置偵測設備的統治點。

表2：在 $CR(10, 3)$ 圖中， $S = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ 與每一個頂點開放鄰域的交集。

頂點 v	$N(v) \cap S$	頂點 v	$N(v) \cap S$
v_0	$\{v_1, v_3, v_7\}$	v_5	$\{v_2, v_6, v_8\}$
v_1	$\{v_0, v_2, v_8\}$	v_6	$\{v_3, v_5, v_7\}$
v_2	$\{v_1, v_3, v_5\}$	v_7	$\{v_0, v_6, v_8\}$
v_3	$\{v_0, v_2, v_6\}$	v_8	$\{v_1, v_5, v_7\}$
v_4	$\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$	v_9	$\{v_0, v_2, v_6, v_8\}$

依推論2，圖 $CR(8, 3)$ 不存在 OLD 集合。而 $CR(7, 3)$ 與 $CR(10, 3)$ 已描述於輔助定理8與9。我們接著提出演算法 OLD_CR3 來求解 $CR(n, 3)$ 的 OLD 集合，當 $n \geq 9$ 且 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 。

Algorithm OLD_CR3

Input: A $CR(n, 3)$ which $n \equiv 0 \pmod{3}$ and $n \geq 9$

Output: A OLD -set S for $CR(n, 3)$.

$S \leftarrow \emptyset$;

For $i = 0$ to $n - 1$ do

 If $i \bmod 3 = 0$ or $i \bmod 3 = 1$ then $S \leftarrow S \cup \{v_i\}$;

End for

定理10. $\gamma_{OLD}(CR(n, 3)) \leq 2n/3$ ，若 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 且 $n \geq 9$ 。

證明. 依演算法 OLD_CR3 的所解出的 OLD 集合 S 中，任意頂點 v 其開放鄰域 $N(v)$ 至少存在一個統治點，滿足規則1。以下的敘述中的 i 值其範圍為 $0 \leq i \leq n - 1$ ，且頂點編號的加、減運算都有除以 n 取餘數。 $N(v_i) \cap S = \{v_{i+1}, v_{i+3}, v_{i-3}\}$ 當 $i \bmod 3 = 0$ ，而 $N(v_i) \cap S = \{v_{i-1}, v_{i+3}, v_{i-3}\}$ 當 $i \bmod 3 = 1$ ，最後， $N(v_i) \cap S = \{v_{i-1}, v_{i+1}\}$ 當 $i \bmod 3 = 2$ 。任意兩個頂點 v 與 w ，其 $N(v) \cap S \neq N(w) \cap S$ ，也滿足規則2。依演算法 OLD_CR3 ，連續3個頂點會選出2個統治點，因此 $|S| = 2n/3$ 。 $\square$

5. 結論及未來工作

我們針對弦環圖 $CR(n, 2)$ 與 $CR(n, 3)$ ，藉由提出演算法來求得開放定位統治數的上界，並證明了部份的精確值。而推論4所提供的 $\gamma_{OLD}(G)$ 的下界是針對一般圖，若是針對弦環圖 $CR(n, k)$ 應可改善的更高。目前，我們能對較小 n 的 $\gamma_{OLD}(CR(n, 2))$ 來個別證明提高下界，尚缺有系統而全面的證明方法。此外，在 $\gamma_{OLD}(CR(n, 3))$ 未解開的部份，其實我們已經有部份答案，但分類複雜且尚待化簡。在完成上述的工作後，我們期待解開更大 k 值的 $\gamma_{OLD}(CR(n, k))$ 。

參考文獻

- [1] J.C. Bermond, F. Comellas, and D.F. Hsu, Distributed Loop Computer Networks: A Survey, Journal of Parallel and Distributed Computing 24 (1995) 2-10.
- [2] R.A. Brualdi and J.Q. Massey, Incidence and strong edge colorings of graphs, Discrete Mathematics 122 (1993) 51-58.

- [3] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater, Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, NewYork, 1998.
- [4] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater, Domination in Graphs: Advanced Topics, Marcel Dekker, NewYork, 1998.
- [5] <http://www.infres.enst.fr/~lobstein/debutBIBidetlocdom.pdf>
- [6] B.S. Panda, A. Pandey, Algorithmic aspects of open neighborhood location-domination in graphs, Discrete Applied Mathematics 216 (2017) 290-306.
- [7] A. Pandey, Open Neighborhood Locating-Dominating Set in Graphs: Complexity and Algorithms, Information Technology (ICIT), 2015 International Conference on IEEE (2015) 1-6.
- [8] S.J. Seo, P.J. Slater, Open neighborhood locating-dominating sets, Australasian Journal of Combinatorics 46 (2010) 109–119.
- [9] S.J. Seo, P.J. Slater, Open neighborhood locating-dominating in trees, Discrete Applied Mathematics 159 (2011) 484–489.
- [10] P. J. Slater, Leaves of trees, Congressus Numerantium 14 (1975) 549–559.
- [11] P. J. Slater, Domination and location in acyclic graphs, Networks 17 (1987) 55–64.
- [12] P. J. Slater, Dominating and reference sets in a graph, Journal of Mathematical and Physical Sciences 22 (1988) 445–455.