傅葉爾轉換(Fourier Transform)

李家同

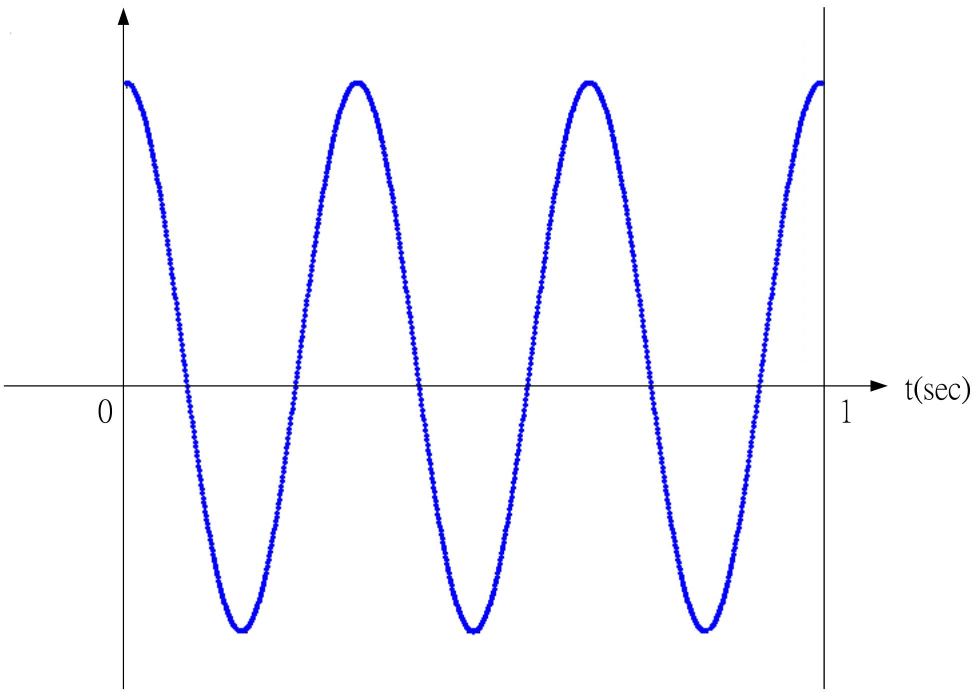
暨南國際大學資訊工程系

rctlee@ncnu.edu.tw

在通訊理論中，傅葉爾轉換(Fourier Transform)扮演了極重要的角色，我們幾乎可以說沒有傅葉爾轉換，就不可能有我們現在的通訊。

傅葉爾轉換究竟是什麼? 如果我們用非常正式的數學方式來解釋它，大家就看不懂了，因此我在這裡設法用非正式的方式來解釋。

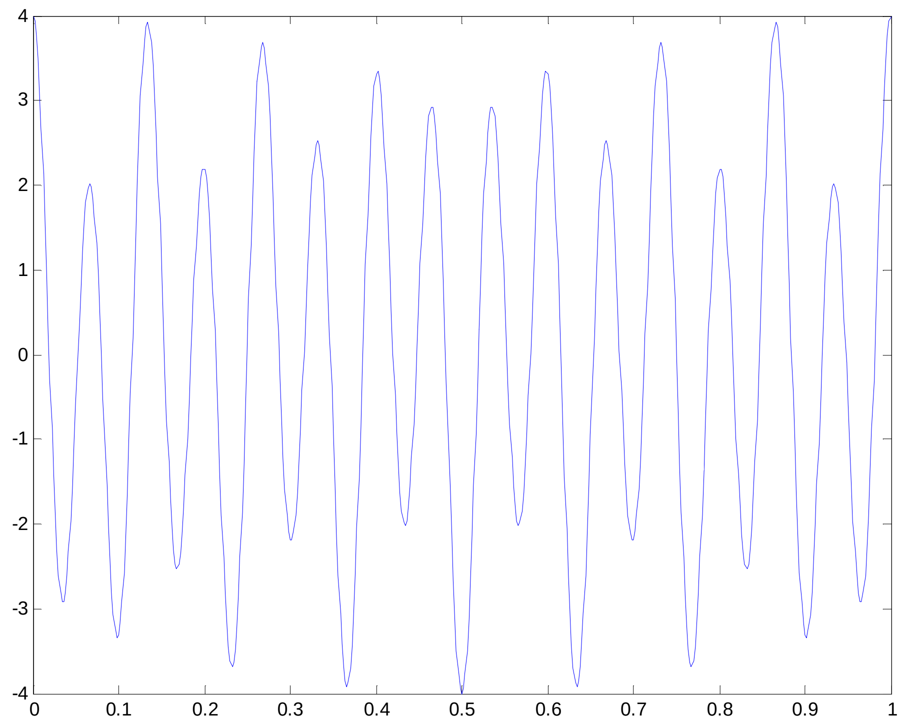
首先,請看圖一，圖一所表示的是一個 cosine 函數，各位可以看出來，在



圖一. 頻率爲 3 的 cosine 函數

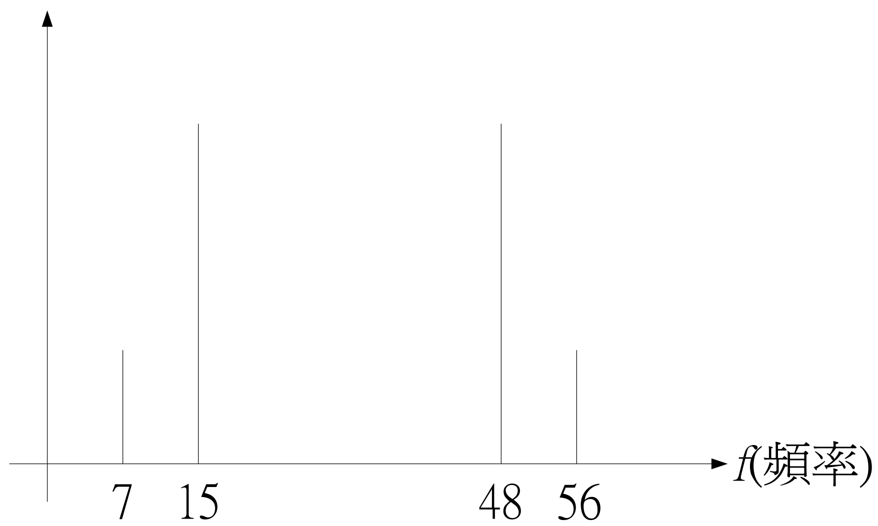
一秒內,這個函數變換了 3 次,所以我們說這是一個頻率爲 3 的 cosine 函數。

請各位再看圖二 ，這個訊號既不是 cosine，也不是 sine，它究竟是什麼呢?



圖二. 一個訊號

如果我們用傅葉爾轉換來分析這個訊號 ，你就可以得到圖三。



圖三. 上圖訊號的傅葉爾轉換頻譜

圖三什麼意義呢? 我們可以發現圖三是左右對稱的 ，而圖三所給的資訊只要看左邊的部份就可以。 在左邊,我們可以看到兩個尖端 ，一個在頻率 f =7 的地方 ，一個在頻率 f =15 的地方 ，換句話說 ，圖二的這個訊號其實是兩個訊號的和:

$$f(t) = \cos(2\pi(7)t) + 3\cos(2\pi(15)t)$$

大概說起來 ，傅葉爾轉換的理論是說,任何一個訊號 ，都是一大堆 cosine 函數的和。 爲了避免太抽象的數字理論 ，我在這篇文章介紹的是離散傅葉爾轉換 (Discreate Fourier Transform)。

假設我們的訊號是 $f(t)$ ，我們在一秒鐘內 ，對 $f(t)$ 取樣 n 次 ，我們就可以得到 $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ ，其中

$$\begin{aligned} a_0 &= f(0) \\ a_1 &= f(1) \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= f(n-1) \end{aligned}$$

我們再將 $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ 送進離散傅葉爾轉換 ，如圖四所示:

圖四. 離散傅葉爾轉換

$A_0, A_1, ..., A_{n-1}$ 代表什麼呢? 以下的式子就說明一切:

$$f(t) = A_0 + A_{n/2} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n/2-1} |A_i| \cos(\frac{2\pi it}{n} + \sigma_i) \qquad \text{for } t = 0,1,2,\cdots,\text{n-1} \qquad (1)$$

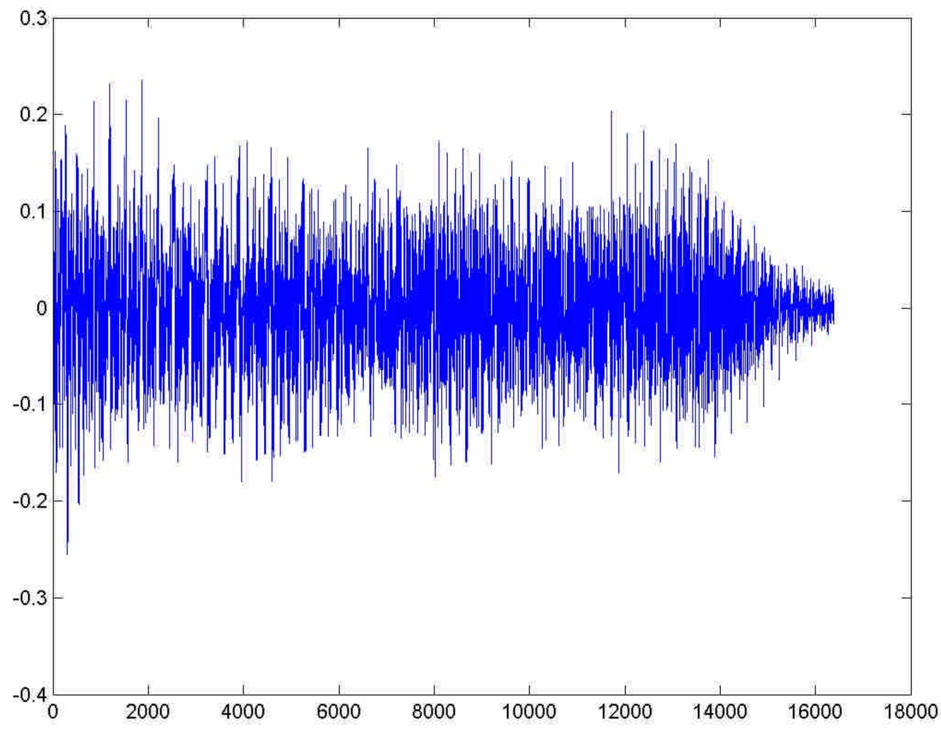
A_i 很 可 能 是 一 個 複 數 , 如 $2+3j$ ， $|A_i|$ 是 一 個 變 數 , 如 果

$A_i = a + jb, |A_i| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。

式(1)中的 i 代表頻率，式(1)表示 $f(t)$ 由 $n/2$ 個 cosine 函數所組成，這些函數的頻率爲 i，$i = 0,1,2,\ldots,\frac{n}{2}-1$，每一個函數的大小是 $|A_i|$，$|A_i|$ 大，代表這個頻率爲 i 的 cosine 函數份量很大，$|A_i|$ 小，表這個頻率爲 i 的 cosine 函數微不足道。

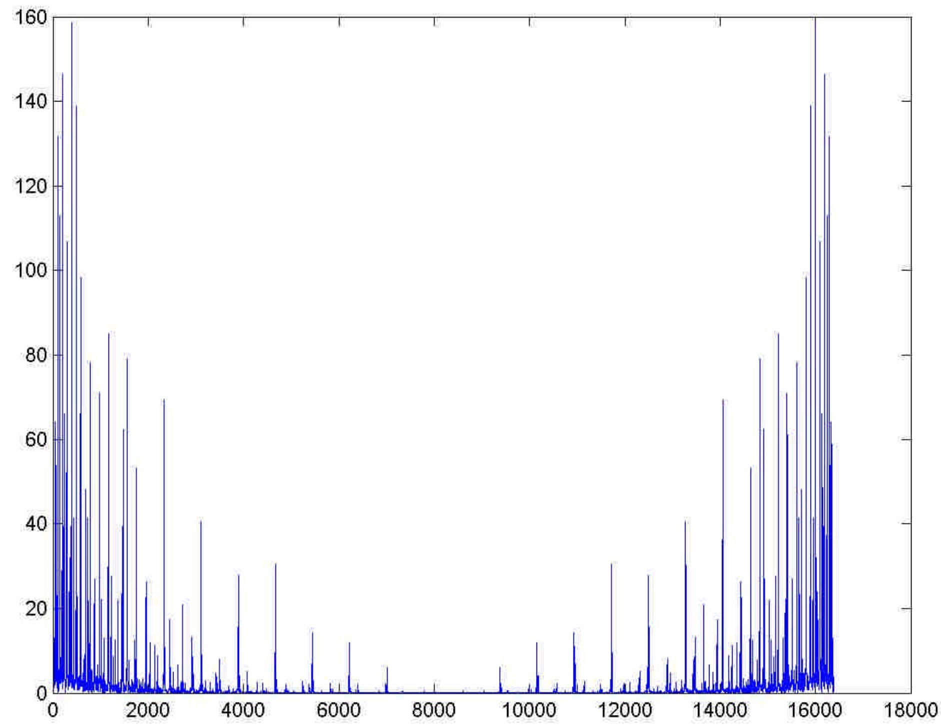
因此，我們可以說，傅葉爾轉換，是一種分析的工具，我們可以利用傅葉爾轉換來看任何一個訊號內究竟有什麼樣的訊號。

現在請看圖五,



圖五 一秒鐘的音樂訊號

圖五的訊號是一秒鐘的音樂訊號，對於我們來說，這當然是一頭霧水, 不知道這個訊號葫蘆裡賣什麼藥，圖六是圖五訊號的離散傅葉爾轉換頻譜。



圖六 一秒鐘的音樂訊號的離散傅葉爾轉換頻譜

讀者可以看到真正重要的頻率集中在 3000Hertz 之前，我們幾乎可以說, 3000Hertz 以後的訊號是不太重要的。我也要強調離散傅葉爾轉換有一個對稱性，各位讀者只需要看 8192hertz 以前的頻率就能夠了，大於 8192Hertz 的頻率一概是多餘的。

我們並不能說公式(1)是對所有的 t 都是對的，只能說對於 $t = 0,1,2,\ldots,n-1$ 是有效的，如果將 $t = 1.75$ 代入公式(1)就不一定對了。

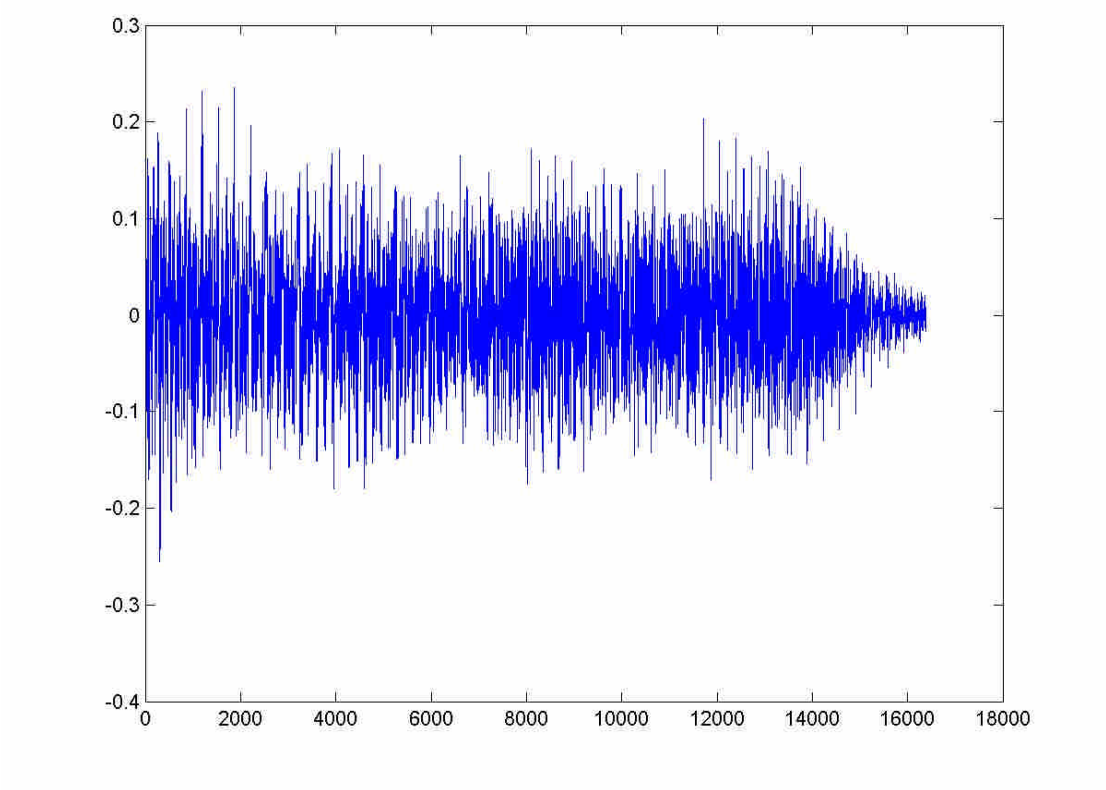
如果我們的 n 取樣非常大，我們幾乎可以說公式(1)對於相當多的 t 值，都是對的。

傅葉爾轉換的一個特色是所謂的反轉傅葉爾轉換(Inverse Fourier Transform), 離散傅葉爾轉換也有反轉離散傅葉爾轉換(Inverse Discrete Fourier Transform)。 圖七顯示反轉離散傅葉爾轉換的功能,

圖七. 反轉離散傅葉爾轉換

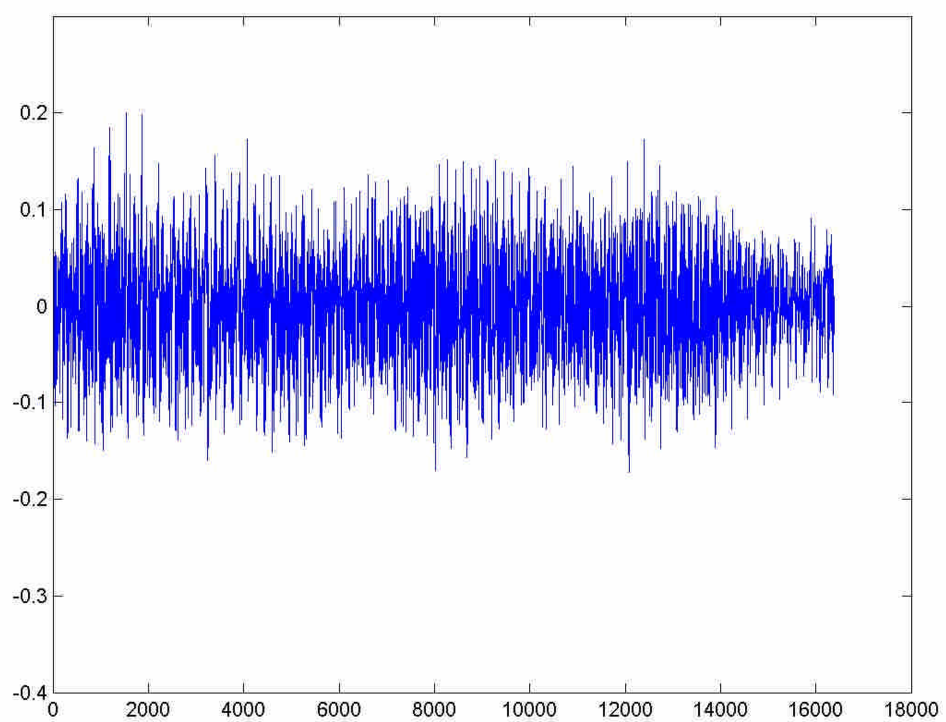
從數學的觀點來看，反轉離散傅葉爾轉換幾乎完全像離散傅葉爾轉換。離散傅葉爾轉換將一個與時間的訊號 $f(t)$ 轉換到頻率的領域，讓我們知道這個訊號各個頻率的訊號有多強。 反轉傅葉爾轉換則將各個頻率的大小轉換成原來的訊號。

圖八就是圖六的反轉，也就是說，當我們將圖六的頻率輸入到反轉離散傅業爾轉換，我們就會得到原來的訓號。 如果我們只顧到圖六中訊號強的頻率，情形如何呢?



圖八. 反轉離散傅葉爾轉換的結果

圖九就是一個例子，我們將圖六中大小小於 10 的頻率去掉，再利用反轉離散傅葉爾轉換，就可以得到圖九，讀者可以看出圖九幾乎和圖五一模一樣。



圖九. 去掉小於 10 的反轉離散傅葉爾轉換的結果

現在我們再考慮一個問題，經由傅葉爾轉換以後，我們可以知道我們人聲音的頻率大概低於 3000Hertz，我們又知道一個訊號的波長 λ 可用以下的公式求得:

$$\lambda = \frac{v}{f} \tag{2}$$

公式(2)中的 v 是光速，等於 $3*10^8$ m/sec， f 就是頻率，以 f = 3000Hertz 爲例，

$$\lambda = \frac{3*10^8}{3*10^3} = 10^5 = 100km$$

如果要直接廣播人的聲音，天線的長度需要 $\frac{\lambda}{2}$ = 50km 之長，這是不可能

的。 我們必須提高訊號的頻率 ，如何做呢? 一個最簡單的是將訊號乘入 $\cos(2\pi f_c t)$ ，其中 f_c 是一個較高的頻率 ，這就是所謂的調幅 ，令 $m(t)$ 代表原來的訊號 ，調頻以後的訊號變成了

$$s(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t) \qquad (3)$$

一旦調幅以後 ，所有原來頻率爲 f 的訊號 ，現在都變成了兩種訊號 ，一個頻率是 $f_c + f$，另一個頻率是 $f_c - f$ 。 因爲 f_c 很高 ，所以 $s(t)$ 中各個訊號都提高到了 f_c 的程度 ，這種訊號就可以很容易輸送出去了。

爲什麼頻率爲 f 的訊號現在變成了 $f_c + f$ 和 $f_c - f$?　這是很容易解釋的 ，傅葉爾轉換告訴我們 ，任何一個訊號都是由一大堆 cosine 訊號所組成的。 假設有一個訊號的頻率是 f，這個訊號就是 $\cos(2\pi ft)$ 。 經過調幅以後 ，這個訊號變成了

$$\cos(2\pi ft)\cos(2\pi f_c t)$$

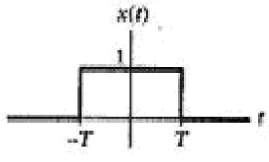
但是以上的式子又可以用以下的式子來表示

$$\begin{aligned}&\cos(2\pi ft)\cos(2\pi f_c t)\\&=\frac{1}{2}(\cos(2\pi(f_c+f)t)+\cos(2\pi(f_c-f)t))\end{aligned}$$

所以我們看出原來的頻率由 f 變成了 $f_c + f$ 和 $f_c - f$ 。

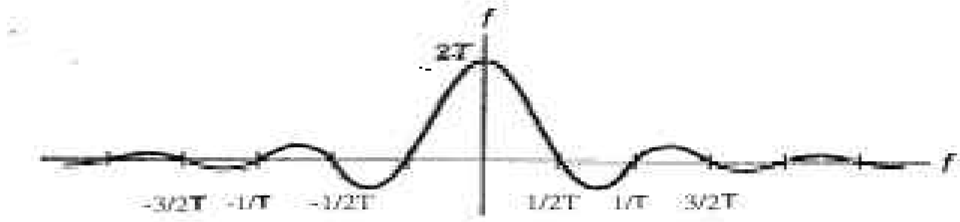
現在我要再談一個有關寬頻傳輸線的問題 ，通常我們說一條很高級的傳輸線爲寬頻傳輸線 ，其實我們傳輸是一連串的脈波 ，我們所謂好的傳輸線 ，應該是在一秒鐘內傳輸大量的脈波 ，所以我們應該是 high bit rate 的傳輸線 ，爲什麼我們又說這是寬頻呢? 難道 high bit rate 就代表頻寬很寬嗎?

這個問題可以用傅葉爾轉換來求得解答。 請看圖十 ，圖十表示的是一個脈波 ，經由傅葉爾轉換 ，我們可以看出這個脈波各種頻率的分佈 ，



圖十 一個脈波

圖十一就是經由傅葉爾轉換所產生的頻率分佈圖，我們通常可以說 $x(f)$ 第一次



圖十一 脈波經由傅葉爾轉換所產生的頻率分佈圖

碰到 f 軸的那一點代表頻寬，如圖十一所示，第一次 $x(f)$ 碰到 f 軸的 f 值是 $1/2T$ ，T 越小，這個值就越大。

如果一條傳輸線可以在一秒鐘內傳輸很多的脈波，每個脈波的寬度就會越小，而這個脈波所含有的頻率就越多，所以這種高速的傳輸線都是寬頻傳輸線。

希望讀者現在對於傅葉爾轉換有一點觀念了。