**★★★★☆**

**題組：Contest Archive** **with Online Judge**

**題號：10990: Another New Function**

**解題者：陳忠義**

**解題日期：2021年5月13日**

**題意：**

以 表示 經過取 次歐拉 函數後，值會變為 ，舉例來說因 ，故 。給定 和 ，，求 SODF之值。

**題意範例：**

輸入：

1 # 有一筆測資

2 5 # 、

輸出：

8 # SODF

# SODF

**解法：**

暴力解法（會 TLE）：

1 對每組 :

2 求 SODF

考慮SODF可以展開為，S. Sivasankaranarayana Pillai[[1]](#footnote-1) 證明 的上下界都為對數函數，因此 本身的時間複雜度為 ，又因求 需要計算 ，若以樸素方法（）計算，則 的實際時間複雜度為 ，假設共有 筆測資，且所有測資都為 SODF，則暴力解法的最差時間複雜度為 ，雖然看起來不高，但對於本題，這樣的時間複雜度還是太高，需要優化。

基本解法：

1 對 到 ：  
2 求 並儲存   
3  
4 對 到 ：  
5 求 並儲存   
6  
7 對每組 ：  
8 求 SODF

該方法透過運用類似動態規劃的概念，以 的時間複雜度求得並儲存紀錄 ，使得針對每組 ，只需要線性時間即可求得 SODF。

優化解法：

1 對 到 ：  
2 求 並儲存   
3  
4 對 到 ：  
5 求 並儲存   
6  
7 對 到 ：  
8 求 SODF 並儲存   
9  
10 對每組 ：  
11 求 SODFSODF

優化解法比起基礎解法更快的地方在於透過歐拉篩法的概念在線性時間求得 ，並且利用同上面 的概念在線性時間計算 SODF，使得對每組 ，都只需要常數時間即可得解，另外容易看出 SODF 與 SODFSODF 等價。

**解法範例：**

基本解法：求 SODF

步驟一：建立

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
|  | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 2 | 6 | 4 | … |

步驟二：根據 建立

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
|  | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | … |

注意到 可由 給出，因此本步驟可在線性時間完成，並且在本題 的數值不影響 SODF 的正確性，因為 。

步驟三：根據 計算 SODF

SODF

優化解法：求 SODF

步驟一：建立

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
|  | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 2 | 6 | 4 | … |

步驟二：根據 建立

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
|  | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | … |

步驟三：根據 建立 SODF

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
|  | 0 | 1 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 | 16 | … |

與步驟二類似，SODF 可由 SODF 給出，因此可以在線性時間計算完成，並且 SODF 所使用的陣列可與 的相同，所以不會占用多餘的記憶體。

步驟四：計算SODFSODF

SODFSODF

**討論：**

無

**程式：**

無

1. S. Sivasankaranarayana Pillai, [*On a function connected with Φ(n)*](https://projecteuclid.org/journals/bulletin-of-the-american-mathematical-society-new-series/volume-35/issue-6/On-a-function-connected-with-phi-left-n-right/bams/1183493597.full), Bull. Amer. Math. Soc., 35.6 (1929), 837-841. [↑](#footnote-ref-1)