★★★★☆

**題組**：Contest Volumes with Online Judge

**題號**：10090: Marbles (1)

**解題者**：楊崑

**解題日期**：2022年6月02日

**題意**：

給你n個球，和兩種盒子。

第一種盒子：每個盒子c1元，可以恰好裝n1個球

第二種盒子：每個盒子c2元，可以恰好裝n2個球

找出一種方法把這n個球裝進盒子，每個盒子都裝滿，並且花費最少的錢。則第一種盒子共m1個，第二種盒子共m2個

**題意範例：**

43

1 3

 2 4 🡺 13 1
 40

 5 9

 5 12 🡺 failed

**解法**：

假設第一種盒子m1個，第二種盒子m2個

 則 n1 \* m1 + n2 \* m2 = n - (1)

 用擴展歐幾裡德算法可知

 a \* x + b \* y=gcd(a, b) = g; - (2)

 由 (1) (2) 得知

 n % g = 0 則有整數解 ，n % g != 0 則無整數解

 且通解為 X = (n \* x / g) + ( b / g) \* t

 Y = (n \* y / g) - ( a / g) \* t t 為整數

 且m1和m2不能是負數，m1>=0, m2>=0,

 所以t的範圍為-nx/b <= t <= ny/a，且 t 必須是整數。

 所以 t1 = ceil(-nx/b) , t2 = floor(ny/a)

 最後比較 第一種盒子和第二種盒子 每顆球需要的錢

 若 c1/n1 < c2/n2 則 m1 = (n \* x / g) + ( b / g) \* t2

 m2 = (n \* y/ g) - ( a / g) \* t2

 反之

**解法範例**：

n = 43

 第一種盒子c1 = 1元 可裝n1 = 3個球

 第二種盒子c2 = 2元 可裝n2 = 4個球

 3\*m1 + 4\*m2 = 43

 3\*x + 4\*y = gcd(3,4) = 1

 43 % 1 = 0 有整數解

 且利用歐幾里德擴展算法得 x=-1,y=1

 c1/n1 = 1/3 < c2/n2 = 1/2

 t1 = ceil(-nx/b)=11 , t2 = floor(ny/a)=14

 m1 = (43\*-1/1) + (4 / 1) \* 14 = 13

 m2 = (43\*1/1) - (3 / 1) \* 14 = 1

**討論**：

(1) 通解

 擴展歐幾裡德算法 ax + by = gcd(a,b) = g通解為 x = x0 + ( b / g ) \* t -(1)

 y = y0 - (a / g ) \* t -(2)

 x0 和 y0 為任意一組解

 且 n1 \* m1 + n2 \* m2 = n

 a \* x + b \* y=gcd(a, b) = g 兩邊同時乘以 n / g,

 解出m1= nx / g, m2 = ny / g, 為其中一解帶入 (1)(2)

 得通解為為 X = (n \* x / g) + ( b / g) \* t

 Y = (n \* y / g) - ( a / g) \* t

**程式**：

無