★★★★☆

**題組**：Contest Volumes with Online Judge

**題號**：10090: Marbles (1)

**解題者**：楊崑

**解題日期**：2022年6月02日

**題意**：

給你n個球，和兩種盒子。

第一種盒子：每個盒子c1元，可以恰好裝n1個球

第二種盒子：每個盒子c2元，可以恰好裝n2個球

找出一種方法把這n個球裝進盒子，每個盒子都裝滿，並且花費最少的錢。則第一種盒子共m1個，第二種盒子共m2個

**題意範例：**

43

1 3

2 4 🡺 13 1  
 40

5 9

5 12 🡺 failed

**解法**：

假設第一種盒子m1個，第二種盒子m2個

則 n1 \* m1 + n2 \* m2 = n - (1)

用擴展歐幾裡德算法可知

a \* x + b \* y=gcd(a, b) = g; - (2)

由 (1) (2) 得知

n % g = 0 則有整數解 ，n % g != 0 則無整數解

且通解為 X = (n \* x / g) + ( b / g) \* t

Y = (n \* y / g) - ( a / g) \* t t 為整數

且m1和m2不能是負數，m1>=0, m2>=0,

所以t的範圍為-nx/b <= t <= ny/a，且 t 必須是整數。

所以 t1 = ceil(-nx/b) , t2 = floor(ny/a)

最後比較 第一種盒子和第二種盒子 每顆球需要的錢

若 c1/n1 < c2/n2 則 m1 = (n \* x / g) + ( b / g) \* t2

m2 = (n \* y/ g) - ( a / g) \* t2

反之

**解法範例**：

n = 43

第一種盒子c1 = 1元 可裝n1 = 3個球

第二種盒子c2 = 2元 可裝n2 = 4個球

3\*m1 + 4\*m2 = 43

3\*x + 4\*y = gcd(3,4) = 1

43 % 1 = 0 有整數解

且利用歐幾里德擴展算法得 x=-1,y=1

c1/n1 = 1/3 < c2/n2 = 1/2

t1 = ceil(-nx/b)=11 , t2 = floor(ny/a)=14

m1 = (43\*-1/1) + (4 / 1) \* 14 = 13

m2 = (43\*1/1) - (3 / 1) \* 14 = 1

**討論**：

(1) 通解

擴展歐幾裡德算法 ax + by = gcd(a,b) = g通解為 x = x0 + ( b / g ) \* t -(1)

y = y0 - (a / g ) \* t -(2)

x0 和 y0 為任意一組解

且 n1 \* m1 + n2 \* m2 = n

a \* x + b \* y=gcd(a, b) = g 兩邊同時乘以 n / g,

解出m1= nx / g, m2 = ny / g, 為其中一解帶入 (1)(2)

得通解為為 X = (n \* x / g) + ( b / g) \* t

Y = (n \* y / g) - ( a / g) \* t

**程式**：

無